множества имеет наибольшую нижнюю грань. Так как любое множество из Ω' ограничено сверху, а именно, элементом Ω, то из теоремы 0.9 вытекает, что у каждого непустого подмножества множества Ω' есть наименьшая верхняя грань*). Один из любопытных фактов, относящихся к Ω', состоит в следующем.

23. Теорема. *Если A — счетное подмножество множества Ω' и $\Omega \notin A$, то наименьшая верхняя грань множества A меньше Ω.*

Доказательство. Из того, что A счетно и не содержит Ω, следует, что множество $\{x : x \leqslant a\}$ для любого $a \in A$ счетно. Значит, счетно и объединение множеств такого вида: множество $\{x : x \leqslant a$ *для некоторого* a *из* $A\}$. Наименьшая верхняя грань b последнего множества ограничивает сверху множество A. Множество элементов, предшествующих b, счетно, следовательно, $b \neq \Omega$. Отсюда следует, что наименьшая верхняя грань множества A меньше Ω.

Один из элементов множества Ω' заслуживает специального внимания. Это — первый элемент из Ω', для которого множество предшествующих элементов бесконечно; он называется *первым бесконечным порядковым числом* и обозначается через ω. Символ ω уже употреблялся для обозначения множества неотрицательных целых чисел. При построении порядковых чисел выясняется, что первое бесконечное порядковое число и является в действительности множеством неотрицательных целых чисел.

ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Декартово произведение множеств A и B определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in A$ и $y \in B$. Полезно распространить определение декартова произведения на любые семейства множеств; напомним, что ранее мы сделали это для операций

*) Конечно, наименьшая верхняя грань подмножества вполне упорядоченного множества может уже этому подмножеству не принадлежать (в отличие от наибольшей нижней грани). (*Прим. перев.*)

объединения и пересечения. Предположим, что для каждого $a \in A$, где A — множество индексов, задано некоторое множество X_a. Декартово произведение множеств X_a, обозначаемое $\Pi\{X_a : a \in A\}$, определяется как множество всех функций x, определенных на множестве A и таких, что $x(a) \in X_a$ для каждого a из A. Принято при этом аргумент записывать как индекс; таким образом, $\Pi\{X_a : a \in A\} = \{x : x$ — *функция, определенная на* A, *такая, что* $x_a \in X_a$ *для каждого* a *из* $A\}$. Сначала это определение кажется немного странным; в действительности оно точно выражает интуитивно ясную концепцию: точка произведения является набором точек сомножителей, в котором каждый сомножитель представлен ровно одной точкой. Множество X_a называется a-м *координатным множеством*, а точка x_a называется a-й координатой точки x произведения. Функция P_a, которая точке x произведения ставит в соответствие ее a-ю координату x_a, называется *проекцией* на a-е координатное множество. Таким образом, $P_a(x) = x_a$.

Один специальный случай декартова произведения особенно важен. Пусть каждое координатное множество X_a совпадает с некоторым фиксированным множеством Y. Тогда $\Pi\{X_a : a \in A\} = \Pi\{Y : a \in A\} = \{x : x$ *является функцией, отображающей множество* A *в* $Y\}$. Итак, декартово произведение в этом случае есть в точности множество всех функций, отображающих множество A в Y; это множество иногда обозначают через Y^A. Хорошо известный пример такого рода произведения представляет *n-мерное евклидово пространство*. Его точками являются всевозможные вещественные функции, определенные на множестве первых n натуральных чисел: $0, 1, \ldots, n-1$; при этом i-я координата элемента x есть x_i.

Интересен еще один специальный случай. Предположим, что множество индексов само является некоторым семейством $\mathfrak{A}$ множеств и что для каждого A из $\mathfrak{A}$ A-е координатное множество есть A. В этом случае декартово произведение $\Pi\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ является множеством функций x на $\mathfrak{A}$ таких, что $x_A \in A$ для каждого A из $\mathfrak{A}$. Эти функции — элементы декартова произведения — называются иногда *функциями выбора*, соответствующими семейству $\mathfrak{A}$, ибо интуитивно ясно, что каждая функция x осуществляет некоторый «выбор» по одному элементу x_A из каждого A. Если среди элементов семейства $\mathfrak{A}$ есть пустое множество, то у $\mathfrak{A}$, очевидно, нет функций выбора. Значит, декартово произведение в этом случае пусто. Если все элементы семейства являются непустыми множествами, то все же еще не вполне очевидно, что декартово произведение не пусто. В действительности вопрос о существовании функции выбора для такого семейства оказывается чрезвычайно деликатным. Следующий параграф посвящен нескольким предложениям, каждое из которых эквивалентно положительному ответу на возникший вопрос. Самое удобное из них мы примем за аксиому. (В приложении предпочтение отдается другому из этих предложений. Вместе с материалом следующего параграфа результаты приложения означают эквивалентность предложений, которые будут сейчас приведены.) Нам стоит большого труда воздержаться от обсуждения философских аспектов вопроса.

ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОСТИ ХАУСДОРФА

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство множеств (или семейство семейств множеств). Его элемент A называется *наибольшим элементом* семейства $\mathfrak{A}$, если семейство A содержит любое другое семейство, принадлежащее $\mathfrak{A}$ (т. е. A больше любого другого элемента из $\mathfrak{A}$).

Аналогично A называется *наименьшим элементом* семейства $\mathfrak{A}$, если элемент A содержится в каждом другом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Часто бывает важно знать, есть ли в семействе наибольший или наименьший элемент. Ясно, что наибольший и наименьший элементы, если они существуют, определены однозначно. Однако даже когда в семействе $\mathfrak{A}$ нет наибольшего элемента, в нем может существовать элемент A, который не является частью никакого другого элемента из $\mathfrak{A}$. При этом в $\mathfrak{A}$ могут быть элементы, которые одновременно не содержат A и сами в A не содержатся. Говорят тогда, что A является максимальным элементом семейства. Формальное определение: A называется *максимальным* элементом семейства $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда никакой элемент из $\mathfrak{A}$ не содержит A в качестве собственной