ция x осуществляет некоторый «выбор» по одному элементу x_A из каждого A. Если среди элементов семейства $\mathfrak{A}$ есть пустое множество, то у $\mathfrak{A}$, очевидно, нет функций выбора. Значит, декартово произведение в этом случае пусто. Если все элементы семейства являются непустыми множествами, то все же еще не вполне очевидно, что декартово произведение не пусто. В действительности вопрос о существовании функции выбора для такого семейства оказывается чрезвычайно деликатным. Следующий параграф посвящен нескольким предложениям, каждое из которых эквивалентно положительному ответу на возникший вопрос. Самое удобное из них мы примем за аксиому. (В приложении предпочтение отдается другому из этих предложений. Вместе с материалом следующего параграфа результаты приложения означают эквивалентность предложений, которые будут сейчас приведены.) Нам стоит большого труда воздержаться от обсуждения философских аспектов вопроса.

ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОСТИ ХАУСДОРФА

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство множеств (или семейство семейств множеств). Его элемент A называется *наибольшим элементом* семейства $\mathfrak{A}$, если семейство A содержит любое другое семейство, принадлежащее $\mathfrak{A}$ (т. е. A больше любого другого элемента из $\mathfrak{A}$).

Аналогично A называется *наименьшим элементом* семейства $\mathfrak{A}$, если элемент A содержится в каждом другом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Часто бывает важно знать, есть ли в семействе наибольший или наименьший элемент. Ясно, что наибольший и наименьший элементы, если они существуют, определены однозначно. Однако даже когда в семействе $\mathfrak{A}$ нет наибольшего элемента, в нем может существовать элемент A, который не является частью никакого другого элемента из $\mathfrak{A}$. При этом в $\mathfrak{A}$ могут быть элементы, которые одновременно не содержат A и сами в A не содержатся. Говорят тогда, что A является максимальным элементом семейства. Формальное определение: A называется *максимальным* элементом семейства $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда никакой элемент из $\mathfrak{A}$ не содержит A в качестве собственной части. Подобным же образом A называется *минимальным* элементом семейства $\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда никакой элемент из $\mathfrak{A}$ не содержится в качестве собственной части в A. Очень легко построить примеры семейств без максимальных элементов, равно как и примеры семейств, в которых каждый элемент является максимальным и минимальным элементом одновременно (в качестве последнего годится семейство, состоящее из попарно непересекающихся множеств). Чтобы обеспечить существование максимальных элементов, надо, вообще говоря, наложить на семейство некоторые специальные ограничения.

Семейство $\mathfrak{N}$ называется *цепью* (иногда *башней*, *гнездом* *)) тогда и только тогда, когда для любых его элементов A и B либо $A \subset B$, либо $B \subset A$. Это условие в точности равносильно утверждению, что семейство $\mathfrak{N}$ линейно упорядочено по включению или — в принятой нами терминологии — что семейство $\mathfrak{N}$ вместе с отношением включения является цепью. Если $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{N}$ — гнездо, то говорят, что $\mathfrak{N}$ является *гнездом* в $\mathfrak{A}$. Мы знаем, что семейство может не иметь максимального элемента. Есть ли максимальный элемент в семействе всех гнезд, лежащих в фиксированном семействе $\mathfrak{A}$, т. е. в каждом ли семействе $\mathfrak{A}$ есть гнездо $\mathfrak{M}$, которое не содержится ни в каком другом гнезде, образованном элементами семейства $\mathfrak{A}$? Будем считать аксиомой следующее утверждение.

24. Принцип максимальности Хаусдорфа. *Для любого семейства множеств $\mathfrak{A}$ и любого гнезда $\mathfrak{N}$, образованного элементами семейства $\mathfrak{A}$, существует максимальное гнездо $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{A}$, содержащее $\mathfrak{N}$.*

В следующей теореме выписан ряд важных следствий принципа максимальности Хаусдорфа. Прежде чем ее сформулировать, скажем несколько слов о сложившейся здесь терминологии. Говорят, что характер семейства $\mathfrak{A}$ *конечен*, тогда и только тогда, когда каждое конечное подмножество любого элемента из $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}$, и каждое множество A, все конечные подмножества кото-

*) Иногда говорят еще в этом случае, что семейство имеет ранг 0. (*Прим. перев.*)

рого принадлежат $\mathfrak{A}$, само принадлежит $\mathfrak{A}$. Пусть $<$ — упорядочение на множестве A. Каждое подмножество B множества A, которое отношением $<$ упорядочивается линейно, называется цепью в A. Элемент x множества A называется максимальным, если x следует за каждым сравнимым с ним элементом из A, т. е. если всегда, когда $y \in A$, либо y предшествует элементу x, либо x не предшествует элементу y. Говорят, что отношение $<$ вполне упорядочивает множество A, тогда и только тогда, когда $<$ является таким линейным упорядочением множества A, что каждое непустое множество имеет первый элемент (элемент, который меньше любого другого элемента этого множества). Если такое отношение $<$ на множестве A существует, то говорят, что множество A можно вполне упорядочить.

25. Теорема. (а) Принцип максимального элемента. *Максимальный элемент в семействе $\mathfrak{A}$ множеств существует, если для каждого гнезда, лежащего в $\mathfrak{A}$, в $\mathfrak{A}$ найдется элемент, который содержит произвольный элемент этого гнезда.*

(б) Принцип минимального элемента. *Минимальный элемент в семействе $\mathfrak{A}$ существует, если для каждого гнезда, лежащего в $\mathfrak{A}$, в $\mathfrak{A}$ найдется элемент, содержащийся в каждом элементе этого гнезда.*

(в) Лемма Тьюки. *В каждом семействе множеств конечного характера есть максимальный элемент.*

(г) Лемма Куратовского. *Каждая цепь в (частично) упорядоченном множестве содержится в некоторой максимальной цепи.*

(д) Лемма Цорна. *Если каждая цепь некоторого частично упорядоченного множества ограничена сверху, то в этом множестве есть максимальный элемент.*

(е) Аксиома выбора. *Пусть X_a — непустое множество для каждого элемента a из множества индексов A. Тогда на A существует функция c такая, что $c(a) \in X_a$ для каждого a из A.*

(ж) Постулат Цермело. *Для любого семейства $\mathfrak{A}$ непересекающихся непустых множеств существует такое множество C, что $A \cap C$ для каждого A из $\mathfrak{A}$ состоит ровно из одной точки.*

(з) Принцип вполне упорядочения. *Каждое множество можно вполне упорядочить.*

Доказательство. Мы дадим наброски доказательств всех этих предложений, предоставив подробности читателям.

Доказательство (а). Возьмем какое-нибудь максимальное гнездо $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{A}$, и пусть A — элемент семейства $\mathfrak{A}$, содержащий множество $\bigcup\{M : M\in\mathfrak{M}\}$. Тогда A — максимальный элемент семейства $\mathfrak{A}$, ибо если бы множество A являлось собственной частью множества $B\in\mathfrak{A}$, то семейство $\mathfrak{M}\cup\{B\}$ было бы гнездом в $\mathfrak{A}$, строго *) содержащим $\mathfrak{M}$, что ведет к противоречию.

Доказательство (б). Ясно, что утверждение (б) можно доказать приблизительно так, как мы доказали утверждение (а). Однако можно вместо этого просто применить утверждение (а). Положим $X=\bigcup\{A : A\in\mathfrak{A}\}$ и обозначим через $\mathfrak{C}$ семейство дополнений в X до элементов семейства $\mathfrak{A}$. Заметим, что в силу формул де Моргана семейство $\mathfrak{C}$ удовлетворяет посылкам утверждения (а). Следовательно, в $\mathfrak{C}$ есть максимальный элемент M. Тогда $X\setminus M$, очевидно, будет минимальным элементом семейства $\mathfrak{A}$.

Доказательство (в). Доказательство основано на принципе максимального элемента (а). Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство конечного характера и $\mathfrak{N}$ — гнездо в $\mathfrak{A}$. Положим $A=\bigcup\{N : N\in\mathfrak{N}\}$. Каждое конечное подмножество F множества A непременно является подмножеством некоторого элемента гнезда $\mathfrak{N}$. В самом деле, можно найти конечное семейство элементов из $\mathfrak{N}$, в объединении которых содержится F. В этом конечном семействе есть наибольший элемент — он и содержит F. Следовательно, $A\in\mathfrak{A}$. Значит, семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет посылкам утверждения (а) и потому имеет максимальный элемент.

Доказательство (г). Рассмотрим произвольную цепь B в частично упорядоченном множестве A. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех цепей в A, содержащих B. Можно непосредственно проверить, что $\bigcup\{N : N\in\mathfrak{N}\}$ для

*) Скажем, что множество (или семейство множеств) строго содержит некоторое множество (или семейство множеств), если последнее является собственной частью первого. (*Прим. перев.*)

любого гнезда $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{A}$ тоже является элементом семейства $\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{A}$ удовлетворяет посылкам утверждения (а) и потому имеет максимальный элемент.

Доказательство (д). Возьмем элемент, ограничивающий сверху какую-нибудь максимальную цепь.

Доказательство (е). Напомним, что функцией называется такое множество упорядоченных пар, что первые координаты различных пар различны. Обозначим через $\mathfrak{F}$ семейство всех функций f, областью определения каждой из которых служит некоторое подмножество множества A, удовлетворяющих условию $f(a) \in X_a$ для каждого a из области определения функции f. (Элементы семейства $\mathfrak{F}$ — это «фрагменты» искомой функции.) Мы сейчас покажем, что $\mathfrak{F}$ — семейство конечного характера. Если f — элемент семейства $\mathfrak{F}$, то каждое подмножество множества f, в частности каждое конечное его подмножество, тоже является элементом семейства $\mathfrak{F}$. С другой стороны, если каждое конечное подмножество некоторого множества f принадлежит семейству $\mathfrak{F}$, то элементами f служат пары, причем любые две различные пары имеют различные первые координаты. Следовательно, f — функция. Более того, если a принадлежит области определения функции f, то $\{(a, f(a))\} \in \mathfrak{F}$, откуда следует, что $f(a) \in X_a$.

Значит, $f \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — семейство конечного характера, то в $\mathfrak{F}$ существует максимальный элемент c и нужно проверить только, что областью определения функции c является все множество A. Предположим, что a — элемент множества A, не принадлежащий области определения функции c. Тогда, так как X_a — непустое множество, в X_a можно выбрать некоторый элемент y. Множество $c \cup \{(a, y)\}$ тоже является функцией и входит в качестве элемента в семейство $\mathfrak{F}$, что противоречит тому, что c — максимальный элемент этого семейства.

Доказательство (ж). Применим аксиому выбора к случаю, когда $\mathfrak{A}$ служит множеством индексов и $X_A = A$ для каждого A из $\mathfrak{A}$.

Доказательство (з). Пусть X — непустое множество, которое надлежит вполне упорядочить. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех непустых подмножеств множества X, и пусть c — некоторая функция выбора на семействе $\mathfrak{A}$. Иными словами, c — такая функция на $\mathfrak{A}$, что $c(A) \in A$ для каждого A из $\mathfrak{A}$. Идея доказательства состоит в определении такого упорядочения $\leqslant$ на множестве X, что для любого его «начального отрезка» A первой точкой, следующей за A, является точка $c(X \setminus A)$. Вот точные формулировки. Скажем, что множество A является отрезком (сегментом) по отношению к упорядочению $<$, тогда и только тогда, когда каждая точка, которая предшествует какому-либо элементу из A, сама принадлежит A. В частности, сегментом является пустое множество. Обозначим через $\mathfrak{C}$ класс всех рефлексивных линейных упорядочений $\leqslant$, удовлетворяющих условиям: областью D упорядочения $\leqslant$ является подмножество множества X и для каждого сегмента A, отличного от D, первый элемент множества $D \setminus A$ есть $c(X \setminus A)$. Почти очевидно, что каждый элемент семейства $\mathfrak{C}$ является вполне упорядочением, ибо если B — непустое подмножество из области определения некоторого такого упорядочения $\leqslant$ и $A = \{y : y \leqslant x$ *и* $y \neq x$ *для каждого* x *из* $B\}$, то $c(X \setminus A)$ есть первый элемент множества B. Пусть $\leqslant$ и $\leqq$ — какие-либо элементы из $\mathfrak{C}$ с областью определения соответственно D и E. Обозначим через A множество всех точек x таких, что множества $\{y : y \leqslant x\}$ и $\{y : y \leqq x\}$ совпадают и что совпадают упорядочения, индуцированные на этом множестве рассматриваемыми упорядочениями. Тогда A является сегментом по отношению к каждому из упорядочений $\leqslant$ и $\leqq$. Если A не совпадает ни с D, ни с E, то $c(X \setminus A)$ в каждом из множеств D и E является первым элементом, не принадлежащим A. Но тогда $c(X \setminus A) \in A$ в силу определения A. Это означает, что либо $A = D$, либо $A = E$. Значит, любые два элемента семейства $\mathfrak{C}$ находятся в следующем отношении друг к другу: область определения одного из них является сегментом по отношению к другому, и на этом сегменте оба упорядочения согласуются. Опираясь на этот факт, нетрудно убедиться, что объединение $\prec$ элементов семейства $\mathfrak{C}$ снова является элементом семейства $\mathfrak{C}$ — наибольшим его элементом. Область определения F упорядочения $\prec$ должна непременно совпадать с X, в противном случае точка $c(X \setminus F)$ могла бы быть поставлена в конец упорядочения $<$ (такое упорядочение $< \cup (F \times \{c(X \setminus F)\})$ было бы элементом семейства $\mathfrak{C}$, строго содержащим $<$). Теорема доказана.

26. Замечания. Каждое из выписанных выше утверждений в действительности эквивалентно принципу максимальности Хаусдорфа, и для каждого из них есть различные основания именно его принять за аксиому. В приложении принцип максимальности выводится из аксиомы выбора. Вывод принципа вполне упорядочения из аксиомы выбора, данный выше, по существу, совпадает с доказательством Цермело [1]. Вполне осуществимо также доказательство этого принципа, основанное на утверждении 0.25(д). Стоит отметить, что объединение элементов гнезда вполне упорядочений, вообще говоря, не будет вполне упорядочением, так что прямое применение принципа максимальности к семейству вполне упорядочений невозможно.

Необходимо оговориться, что названия утверждений из 0.25 в значительной мере произвольны. Принцип максимальности Хаусдорфа был независимо применен Куратовским, Мором и Цорном в формулировках, близких к данным выше.

Наконец, можно сказать, что, хотя приведенная нами формулировка леммы Тьюки более или менее стандартна, она еще недостаточна для обычных применений этой леммы, в частности для доказательства того, что каждая группа содержит максимальную абелеву подгруппу. Есть более общая формулировка леммы Тьюки. Говоря нестрого, она состоит в следующем: если семейство $\mathfrak{A}$ множеств определено условиями (их может быть бесконечно много), касающимися лишь конечных множеств точек, то в $\mathfrak{A}$ есть максимальный элемент.