Глава 1

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ТОПОЛОГИИ И ОКРЕСТНОСТИ

Топология — это семейство $\mathfrak{J}$ множеств, удовлетворяющее двум условиям: пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{J}$ является элементом семейства $\mathfrak{J}$ и объединение элементов любого подсемейства семейства $\mathfrak{J}$ принадлежит $\mathfrak{J}$. Множество $X = \bigcup\{U : U \in \mathfrak{J}\}$ всегда является элементом $\mathfrak{J}$, ибо само $\mathfrak{J}$ является своим подсемейством. Каждый элемент семейства $\mathfrak{J}$ является подмножеством множества X. Множество X называется *пространством топологии* $\mathfrak{J}$, и $\mathfrak{J}$ есть *топология на* X. Пара $(X, \mathfrak{J})$ называется *топологическим пространством*. Когда не может возникнуть недоразумений, разрешается просто писать: «X есть топологическое пространство». Там, где это необходимо, мы будем пользоваться точным обозначением (например, если речь идет о двух различных топологиях на одном и том же множестве X).

Про элементы топологии $\mathfrak{J}$ говорят, что они *открыты* относительно $\mathfrak{J}$, или $\mathfrak{J}$-открыты, или, если речь идет только об одной топологии, элементы семейства $\mathfrak{J}$ просто называют открытыми множествами. Пространство X топологии всегда открыто. Открыто всегда и пустое множество, ибо оно является объединением элементов пустого подсемейства семейства $\mathfrak{J}$. Может случиться, что этими двумя множествами исчерпывается вся топология — ведь семейство, единственными элементами которого являются множество X и пустое множество, образует топологию на X. Эта топология не представляет большого интереса; однако она встречается достаточно часто, чтобы заслуживать специального наименования. Ее называют *антидискретной* (или *тривиальной*) топологией на X; говорят при этом, что $(X, \mathfrak{J})$ — *антидискретное топологическое пространство*. Другой крайностью является семейство всех подмножеств множества X. Оно называется *дискретной* топологией на X ($(X, \mathfrak{J})$ при этом называют *дискретным топологическим пространством*). В дискретном пространстве каждое подмножество открыто.

Дискретная и антидискретная топологии на множестве X являются соответственно наибольшей и наименьшей из всех возможных топологий на X. Мы имеем в виду, что каждая топология на X содержит антидискретную топологию и содержится в дискретной топологии. Пусть $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{U}$ — какие-нибудь топологии на X. Следуя соглашению, принятому для произвольных семейств множеств, скажем, что $\mathfrak{J}$ меньше $\mathfrak{U}$ и что $\mathfrak{U}$ больше $\mathfrak{J}$, тогда и только тогда, когда $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{U}$. Иными словами, $\mathfrak{J}$ меньше $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда каждое $\mathfrak{J}$-открытое множество $\mathfrak{U}$-открыто. В этом случае говорят также, что $\mathfrak{J}$ *грубее* $\mathfrak{U}$ и что $\mathfrak{U}$ *тоньше* $\mathfrak{J}$. (К несчастью, эта же ситуация описывается в литературе еще двумя выражениями: говорят, что $\mathfrak{J}$ *сильнее* $\mathfrak{U}$ и что $\mathfrak{J}$ *слабее* $\mathfrak{U}$ *).) Вообще говоря, для заданных на X топологий $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{U}$ может случиться, что ни одна из них не больше другой; в этом случае, следуя терминологии частично упорядоченных множеств, говорят, что топологии $\mathfrak{J}$ и $\mathfrak{U}$ *несравнимы*.

Очень интересное топологическое пространство образуют вещественные числа с естественной топологией. Это едва ли удивительно, так как само понятие топологического пространства возникло в результате абстрагирования, исходя из некоторых замечательных свойств вещественных чисел. *Обычная топология* на множестве вещественных чисел — это семейство всех тех множеств, которые вместе с каждой своей точкой содержат некоторый интервал около нее. Иными словами, подмножество A множества вещественных чисел открыто в том и только в том случае, когда для каждой точки x из A существуют такие числа a и b, что $a<x<b$ и что множество $\{y : a<y<b\}$ является подмножеством

*) Справедливости ради отметим, что выражение «$\mathfrak{J}$ слабее $\mathfrak{U}$» употребляют в рассматриваемом случае гораздо чаще. (*Прим. перев.*)

множества A. Конечно, мы еще должны проверить, что указанное семейство множеств действительно является топологией, однако это не вызывает никаких затруднений. Удобное совпадение: открытый интервал является открытым множеством.

Подмножество U топологического пространства $(X, \mathfrak{I})$ называется *окрестностью* ($\mathfrak{I}$-окрестностью) точки x тогда и только тогда, когда в U лежит открытое множество, содержащее x. Окрестность точки не обязана быть открытым множеством, но каждое открытое множество является окрестностью любой своей точки. Каждая окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки. Если $\mathfrak{I}$ — антидискретная топология, то единственной окрестностью произвольной точки x пространства X является все пространство X. Если $\mathfrak{I}$ — дискретная топология, то каждое подмножество пространства является окрестностью любой своей точки. В случае, когда X — множество вещественных чисел и $\mathfrak{I}$ — обычная топология, окрестностью точки является любое множество, содержащее какой-нибудь открытый интервал, которому принадлежит рассматриваемая точка.

1. Теорема. *Множество A открыто тогда и только тогда, когда оно содержит окрестность каждой из своих точек.*

Доказательство. Объединение U всех открытых подмножеств множества A является, очевидно, открытым подмножеством множества A. Если A содержит окрестность каждой своей точки, то каждая точка x множества A принадлежит некоторому его открытому подмножеству. Поэтому $x \in U$, откуда следует, что $A = U$, т. е. что A — открытое множество. С другой стороны, если множество A открыто, то каждая точка x из A входит в A вместе с некоторой своей окрестностью (таковой является, например, все множество A).

Из теоремы 1 следует, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой входящей в него точки.

Системой окрестностей точки называется семейство всех окрестностей этой точки.

2. Теорема. *Пусть $\mathfrak{U}$ — система окрестностей точки. Тогда пересечение конечного множества эле-*

ментов из $\mathfrak{U}$ *принадлежит* $\mathfrak{U}$ *и каждое множество, которое содержит некоторый элемент из* $\mathfrak{U}$, *само входит в* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть U и V — окрестности точки x. Тогда существуют открытые окрестности U_0 и V_0 точки x, лежащие соответственно в U и V. Тогда множество $U \cap V$ содержит открытую окрестность $U_0 \cap V_0$ точки x и, значит, само является окрестностью точки x. Итак, пересечение двух (а следовательно, и любого конечного семейства) элементов системы $\mathfrak{U}$ снова является элементом системы $\mathfrak{U}$. Если множество U содержит окрестность точки x, то оно содержит и некоторую открытую окрестность этой точки, а потому и само является окрестностью точки x.

3. Замечания. Фреше [1] первый рассматривал абстрактные пространства. Развитие концепции топологического пространства в последующие годы сопровождалось широким экспериментированием с определениями и фундаментальными процессами. Эти теоретические изыскания в большей части отражены в классической работе Хаусдорфа [1] и в вышедших несколько позже томах журнала Fundamenta Mathematicae. В действительности они привели к двум фундаментальным понятиям: топологического пространства и равномерного пространства (глава 6). Последнее понятие, формализованное сравнительно недавно (А. Вейль [1]), возникло в значительной мере благодаря изучению топологических групп.

Вот стандартные руководства по общей топологии: Александров и Хопф [1] (первые две главы), Бурбаки [1], Вайдьянатасвами [1], Куратовский [1], Лефшец [1] (первая глава), Р. Мор [1], Ньюмен [1], Серпинский [1], Тьюки [1], Уайберн [1] и Фреше [2].

ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Подмножество A топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$ называется *замкнутым* тогда и только тогда, когда относительное дополнение $X \setminus A$ открыто. Дополнение к дополнению множества A есть снова A; следова-