ментов из $\mathfrak{U}$ *принадлежит* $\mathfrak{U}$ *и каждое множество, которое содержит некоторый элемент из* $\mathfrak{U}$, *само входит в* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть U и V — окрестности точки x. Тогда существуют открытые окрестности U_0 и V_0 точки x, лежащие соответственно в U и V. Тогда множество $U \cap V$ содержит открытую окрестность $U_0 \cap V_0$ точки x и, значит, само является окрестностью точки x. Итак, пересечение двух (а следовательно, и любого конечного семейства) элементов системы $\mathfrak{U}$ снова является элементом системы $\mathfrak{U}$. Если множество U содержит окрестность точки x, то оно содержит и некоторую открытую окрестность этой точки, а потому и само является окрестностью точки x.

3. Замечания. Фреше [1] первый рассматривал абстрактные пространства. Развитие концепции топологического пространства в последующие годы сопровождалось широким экспериментированием с определениями и фундаментальными процессами. Эти теоретические изыскания в большей части отражены в классической работе Хаусдорфа [1] и в вышедших несколько позже томах журнала Fundamenta Mathematicae. В действительности они привели к двум фундаментальным понятиям: топологического пространства и равномерного пространства (глава 6). Последнее понятие, формализованное сравнительно недавно (А. Вейль [1]), возникло в значительной мере благодаря изучению топологических групп.

Вот стандартные руководства по общей топологии: Александров и Хопф [1] (первые две главы), Бурбаки [1], Вайдьянатасвами [1], Куратовский [1], Лефшец [1] (первая глава), Р. Мор [1], Ньюмен [1], Серпинский [1], Тьюки [1], Уайберн [1] и Фреше [2].

ЗАМКНУТЫЕ МНОЖЕСТВА

Подмножество A топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$ называется *замкнутым* тогда и только тогда, когда относительное дополнение $X \setminus A$ открыто. Дополнение к дополнению множества A есть снова A; следовательно, множество открыто в том и только в том случае, когда дополнение к нему замкнуто. Если $\mathfrak{I}$ — антидискретная топология, то дополнение к X и дополнение к пустому множеству являются единственными замкнутыми множествами; таким образом, только пустое множество и все X в этом случае замкнуты. Все пространство и пустое множество замкнуты (и одновременно открыты) в любом топологическом пространстве; как мы видели, может случиться, что они будут единственными замкнутыми множествами. Если $\mathfrak{I}$ — дискретная топология, то любое множество замкнуто и открыто. Если X — множество вещественных чисел и $\mathfrak{I}$ — обычная топология, то ситуация совсем иная. *Замкнутый интервал* (т. е. множество вида $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$) замкнут — нам повезло!

Открытый интервал не замкнут, и *полуоткрытый интервал* (т. е. множество вида $\{x : a < x \leqslant b\}$ или вида $\{x : a \leqslant x < b\}$, где $a < b$) не открыт и не замкнут. В действительности (см. задачу 1.К) единственными множествами, открытыми и замкнутыми одновременно, являются в этом случае все пространство и пустое множество.

Согласно формулам де Моргана (0.3) объединение (пересечение) дополнений к элементам семейства множеств является дополнением к пересечению (соответственно к объединению). Следовательно, объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество и пересечение любого семейства замкнутых множеств является замкнутым множеством. Эти свойства характеризуют семейства замкнутых множеств, как показывает следующая теорема. Простое ее доказательство опускается.

4. Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство множеств, объединение любого конечного подсемейства элементов которого, равно как и пересечение любого непустого подсемейства элементов из $\mathfrak{F}$, снова является элементом семейства $\mathfrak{F}$, и пусть множество $X = \bigcup\{F : F \in \mathfrak{F}\}$ принадлежит семейству. Тогда $\mathfrak{F}$ есть в точности семейство замкнутых подмножеств множества X относительно топологии, образованной дополнениями к элементам семейства $\mathfrak{F}$.*