ТОЧКИ НАКОПЛЕНИЯ

Топология топологического пространства описывается в терминах окрестностей точек. Значит, должен существовать способ описать и замкнутые множества в терминах окрестностей. Это приводит, как мы сейчас увидим, к некоторой новой классификации точек. Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $X \setminus A$ открыто, т. е. когда у каждой точки множества $X \setminus A$ есть окрестность, лежащая в $X \setminus A$ или, что эквивалентно, не пересекающая множества A. Следовательно, множество A замкнуто в том и лишь в том случае, когда каждая точка x, любая окрестность которой пересекает A, принадлежит этому множеству. Это обстоятельство подсказывает следующее определение.

Точка x называется *точкой накопления* (или *предельной* точкой) подмножества A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ тогда и только тогда, когда любая окрестность точки x содержит отличную от x точку множества A *). Тогда можно утверждать, что любая окрестность точки x пересекает множество A, в том и только в том случае, когда либо x принадлежит A, либо x является предельной точкой для A. Поэтому не вызывает сомнений справедливость следующей теоремы.

5. Теорема. *Подмножество топологического пространства замкнуто в том и только в том случае, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Часто, если x — предельная точка для множества A, то говорят весьма многозначительную фразу: «В любой близости от x есть точки множества A». Под впечатлением от этого мы должны признать, что антидискретное пространство действительно чрезвычайно переполнено, ибо каждая точка x является точкой накопления любого множества, отличного от пустого множества и множества $\{x\}$. С другой стороны, в дискретном топологическом пространстве никакая точка не является предельной ни для какого множества. В случае множества X вещественных чисел с обычной топологией могут осуще-

*) Заметим сразу, что предельная точка множества A может не принадлежать множеству A. (*Прим. перев.*)

ствляться самые разнообразные возможности. Если A — открытый интервал $(0, 1)$, то каждая точка замкнутого интервала $[0, 1]$ является предельной точкой множества A. Если A — множество неотрицательных рациональных чисел, квадрат которых не превосходит 2, то множество предельных точек множества A — замкнутый интервал $[0, \sqrt{2}]$. Если A — множество чисел, обратных к целым числам, то 0 — единственная предельная точка множества A. Множество целых чисел вовсе не имеет предельных точек.

6. Теорема. *Если к множеству добавить множество всех его предельных точек, то получится замкнутое множество.*

Доказательство. Если x не принадлежит A и не является предельной точкой множества A, то найдется открытая окрестность U точки x, не пересекающаяся с A. Так как множество U является окрестностью любой лежащей в нем точки, то ни одна из точек множества U не является предельной для A. Следовательно, объединение множества A и множества всех его предельных точек является дополнением к открытому множеству.

Множество всех предельных точек множества A иногда называют *производным* множеством множества A.

ЗАМЫКАНИЕ

Замыкание ($\mathfrak{J}$-замыкание) подмножества A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Замыкание множества A обозначается через $\bar{A}$ или через $[A]$. Множество $\bar{A}$ всегда замкнуто, как пересечение замкнутых множеств. Очевидно, $\bar{A}$ содержится в каждом замкнутом множестве, содержащем A. Следовательно, $\bar{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A; значит, A замкнуто в том и только в том случае, когда $\bar{A} = A$. Следующая теорема описывает замыкание множеств в терминах предельных точек.

7. Теорема. *Замыкание произвольного множества есть объединение этого множества и множества его предельных точек.*