ствляться самые разнообразные возможности. Если A — открытый интервал $(0, 1)$, то каждая точка замкнутого интервала $[0, 1]$ является предельной точкой множества A. Если A — множество неотрицательных рациональных чисел, квадрат которых не превосходит 2, то множество предельных точек множества A — замкнутый интервал $[0, \sqrt{2}]$. Если A — множество чисел, обратных к целым числам, то 0 — единственная предельная точка множества A. Множество целых чисел вовсе не имеет предельных точек.

6. Теорема. *Если к множеству добавить множество всех его предельных точек, то получится замкнутое множество.*

Доказательство. Если x не принадлежит A и не является предельной точкой множества A, то найдется открытая окрестность U точки x, не пересекающаяся с A. Так как множество U является окрестностью любой лежащей в нем точки, то ни одна из точек множества U не является предельной для A. Следовательно, объединение множества A и множества всех его предельных точек является дополнением к открытому множеству.

Множество всех предельных точек множества A иногда называют *производным* множеством множества A.

ЗАМЫКАНИЕ

Замыкание ($\mathfrak{J}$-замыкание) подмножества A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A. Замыкание множества A обозначается через $\bar{A}$ или через $[A]$. Множество $\bar{A}$ всегда замкнуто, как пересечение замкнутых множеств. Очевидно, $\bar{A}$ содержится в каждом замкнутом множестве, содержащем A. Следовательно, $\bar{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A; значит, A замкнуто в том и только в том случае, когда $\bar{A}=A$. Следующая теорема описывает замыкание множеств в терминах предельных точек.

7. Теорема. *Замыкание произвольного множества есть объединение этого множества и множества его предельных точек.*

Доказательство. Каждая предельная точка множества A является предельной точкой и любого множества, содержащего множество A. Поэтому она входит в каждое замкнутое множество, содержащее A. Следовательно, множество A и все его предельные точки содержатся в $\bar{A}$. С другой стороны, в силу предыдущей теоремы множество, состоящее из точек множества A и всех предельных точек множества A, замкнуто и потому содержит $\bar{A}$.

Функцию, которая произвольному подмножеству топологического пространства ставит в соответствие его замыкание $\bar{A}$, можно было бы назвать функцией замыкания, или оператором замыкания, относительно топологии. Этот оператор определяет топологию полностью, ибо множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A=\bar{A}$. Иными словами, замкнуты те и только те множества, которые остаются неподвижными под действием оператора замыкания. Полезно задать вопрос: когда оператор, определенный для всех подмножеств фиксированного множества X, является оператором замыкания относительно некоторой топологии на X? Оказывается, операторы замыкания характеризуются четырьмя весьма простыми свойствами. Во-первых, так как пустое множество замкнуто, то замыкание пустого множества пусто. Во-вторых, каждое множество содержится в своем замыкании. Далее, так как замыкание любого множества замкнуто, то замыкание замыкания множества совпадает с замыканием этого множества (прибегая к обычной для алгебры терминологии, можно сказать, что оператор замыкания идемпотентен). Наконец, замыкание объединения двух множеств есть объединение их замыканий. В самом деле, $\overline{A \cup B}$ — замкнутое множество, содержащее как A, так и B. Следовательно, множества $\bar{A}$ и $\bar{B}$ тоже принадлежат множеству $\overline{A \cup B}$. Тогда их объединение $\bar{A} \cup \bar{B}$ содержится в $\overline{A \cup B}$. С другой стороны, $\bar{A} \cup \bar{B}$ — замкнутое множество, содержащее $A \cup B$, и, значит, оно содержит $\overline{A \cup B}$.

Оператор замыкания на X — это оператор, который ставит в соответствие каждому подмножеству A множества X некоторое подмножество $A^c \subset X$ таким образом, что выполняются следующие четыре условия, называемые *аксиомами замыкания Куратовского*:

(а) *если* Λ — *пустое множество, то* $\Lambda^c=\Lambda$,

(б) *для каждого* A $A\subset A^c$,

(в) *для каждого* A $A^{cc}=A^c$,

(г) *для любых* A *и* B $(A\cup B)^c=A^c\cup B^c$.

Следующая теорема Куратовского показывает, что эти четыре утверждения в действительности характеризуют операцию топологического замыкания. Топология, определенная ниже, называется топологией, ассоциированной с оператором замыкания.

8. Теорема. *Пусть* c — *оператор замыкания на* X *и* $\mathfrak{F}$ — *семейство всех подмножеств* A *множества* X *таких, что* $A^c=A$. *Обозначим через* $\mathfrak{J}$ *семейство, образованное дополнениями к элементам семейства* $\mathfrak{F}$. *Тогда* $\mathfrak{J}$ — *топология на* X *и* $A^c=\mathfrak{J}$-*замыкание множества* A *для любого* $A\subset X$.

Доказательство. Аксиома (а) показывает, что пустое множество принадлежит $\mathfrak{F}$, а (г) означает, что объединение любых двух множеств семейства $\mathfrak{F}$ тоже является его элементом. Следовательно, и объединение любого конечного (пустого или непустого) подсемейства элементов из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. В силу (б) $X\subset X^c$, так что $X=X^c$. Значит, объединение элементов семейства $\mathfrak{F}$ есть все X. В силу теоремы 1.4 будет доказано, что $\mathfrak{J}$ — топология на X, если мы убедимся, что пересечение любого подсемейства элементов из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Заметим сначала, что если $B\subset A$, то $B^c\subset A^c$, ибо $A^c=[(A\setminus B)\cup B]^c=(A\setminus B)^c\cup B^c$ *). Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — какое-нибудь непустое подсемейство семейства $\mathfrak{F}$ и $B=\bigcap\{A: A\in\mathfrak{A}\}$. Множество B содержится в каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$; следовательно, $B^c\subset\bigcap\{A^c: A\in\mathfrak{A}\}=\bigcap\{A: A\in\mathfrak{A}\}=B$. Так как $B\subset B^c$, то $B=B^c$ и $B\in\mathfrak{F}$. Это показывает, что $\mathfrak{J}$ является топологией. Остается только доказать, что $A^c=\bar{A}$, где $\bar{A}$ — $\mathfrak{J}$-замыкание множества A. По определению $\bar{A}$ является пересечением всех $\mathfrak{J}$-замкнутых множеств, т. е. элементов семейства $\mathfrak{F}$, со-

*) Символ [ ] никогда в этой книге не означает замыкания; он выполняет обычную роль скобок. (*Прим. перев.*)

держащих множество A. В силу аксиомы (в) $A^c \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\bar{A} \subset A^c$. Так как $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ и $\bar{A} \supset A$, то $\bar{A} \supset A^c$; следовательно, $\bar{A} = A^c$.

ВНУТРЕННОСТЬ И ГРАНИЦА

На семействе всех подмножеств топологического пространства определен еще один оператор, тесно связанный с оператором замыкания. Точка x подмножества A топологического пространства называется *внутренней точкой* этого множества тогда и только тогда, когда A является окрестностью точки x. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается через A^0 *). (В обычной терминологии отношение «(точка) является внутренней точкой (множества)» является обратным к отношению «(множество) является окрестностью (точки)».) Прежде чем рассмотреть примеры, удобно связать введенное сейчас понятие с ранее определенными.

9. Теорема. *Пусть A — подмножество топологического пространства X. Тогда внутренность A^0 множества A есть открытое множество, причем наибольшее открытое множество из всех, содержащихся в A. Множество A открыто в том и только в том случае, когда $A = A^0$. Множество всех точек множества A, не являющихся предельными точками для $X \setminus A$, есть в точности A^0. Замыкание множества $X \setminus A$ совпадает с $X \setminus A^0$.*

Доказательство. Если точка x принадлежит внутренности множества A, то x является элементом некоторого открытого подмножества U множества A. Каждый элемент множества U тоже принадлежит A^0. Следовательно, A^0 содержит каждую свою точку вместе с некоторой окрестностью и потому открыто. Если V — открытое подмножество, лежащее в A, и $y \in V$, то A является окрестностью точки y и, значит, $y \in A^0$. Следовательно, множество A^0 содержит каждое открытое подмножество множества A и является, тем самым, наибольшим открытым подмножеством множества A. Если

---

*) В русской литературе приняты также термин «ядро» множества и обозначение $\langle A \rangle$. (*Прим. перев.*)