держащих множество A. В силу аксиомы (в) $A^c \in \mathfrak{F}$ и, значит, $\bar{A} \subset A^c$. Так как $\bar{A} \in \mathfrak{F}$ и $\bar{A} \supset A$, то $\bar{A} \supset A^c$; следовательно, $\bar{A} = A^c$.

ВНУТРЕННОСТЬ И ГРАНИЦА

На семействе всех подмножеств топологического пространства определен еще один оператор, тесно связанный с оператором замыкания. Точка x подмножества A топологического пространства называется *внутренней точкой* этого множества тогда и только тогда, когда A является окрестностью точки x. Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* множества A и обозначается через A^0 *). (В обычной терминологии отношение «(точка) является внутренней точкой (множества)» является обратным к отношению «(множество) является окрестностью (точки)».) Прежде чем рассмотреть примеры, удобно связать введенное сейчас понятие с ранее определенными.

9. Теорема. *Пусть A — подмножество топологического пространства X. Тогда внутренность A^0 множества A есть открытое множество, причем наибольшее открытое множество из всех, содержащихся в A. Множество A открыто в том и только в том случае, когда $A = A^0$. Множество всех точек множества A, не являющихся предельными точками для $X \setminus A$, есть в точности A^0. Замыкание множества $X \setminus A$ совпадает с $X \setminus A^0$.*

Доказательство. Если точка x принадлежит внутренности множества A, то x является элементом некоторого открытого подмножества U множества A. Каждый элемент множества U тоже принадлежит A^0. Следовательно, A^0 содержит каждую свою точку вместе с некоторой окрестностью и потому открыто. Если V — открытое подмножество, лежащее в A, и $y \in V$, то A является окрестностью точки y и, значит, $y \in A^0$. Следовательно, множество A^0 содержит каждое открытое подмножество множества A и является, тем самым, наибольшим открытым подмножеством множества A. Если

---

*) В русской литературе приняты также термин «ядро» множества и обозначение $\langle A \rangle$. (*Прим. перев.*)

множество A открыто, то оно, конечно, совпадает с наибольшим своим открытым подмножеством. Значит, множество A открыто в том и только в том случае, когда $A=A^0$. Если точка $x \in A$ не является предельной для $X \setminus A$, то у x есть окрестность U, не пересекающая множества $X \setminus A$, т. е. целиком содержащаяся в A. Тогда множество A является окрестностью точки x и $x \in A^0$. С другой стороны, множество A^0 является окрестностью каждой своей точки и не пересекается с множеством $X \setminus A$. Значит, никакая точка из A^0 не является предельной для $X \setminus A$. Наконец, так как A^0 состоит из тех точек множества A, которые не являются предельными точками множества $X \setminus A$, то его дополнение $X \setminus A^0$ состоит в точности из тех точек, которые либо сами принадлежат $X \setminus A$, либо являются предельными точками для множества $X \setminus A$. Это означает, что множество $X \setminus A^0$ совпадает с замыканием $(\overline{X \setminus A})$ множества $X \setminus A$.

Последнее утверждение доказанной теоремы заслуживает дальнейшего рассмотрения. Условимся для удобства обозначать относительное дополнение $X \setminus A$ через A'. Тогда A'' — дополнение к дополнению множества A — есть снова A (иногда говорят, что $'$ является оператором с периодом два). Можно тогда предыдущий результат сформулировать так: $(A^0)' = \overline{A'}$. Переходя к дополнениям, заключаем, что $A^0 = (\overline{A'})'$. Таким образом, внутренность множества A есть дополнение к замыканию дополнения множества A. Если заменить здесь A на его дополнение, получаем, что $\overline{A} = (A'^0)'$ — замыкание множества является дополнением к внутренности дополнения этого множества *).

---

*) Напрашивается забавная и полезная задача. Сколько различных множеств можно построить, исходя из фиксированного подмножества A топологического пространства, в результате последовательного применения в любом порядке операторов замыкания, перехода к внутренности и перехода к дополнению? В силу замечаний, высказанных в предыдущем абзаце, эта задача сводится к такой: сколько различных множеств можно получить, отправляясь от одного множества A, чередованием оператора перехода к дополнению и оператора замыкания? Неожиданный ответ на этот вопрос дается в формулировке задачи 1. E.

Если X — антидискретное пространство, то внутренность любого его подмножества, за исключением самого X, пуста. Если X — дискретное пространство, то любое его подмножество открыто и замкнуто одновременно и, следовательно, совпадает со своей внутренностью и со своим замыканием. Если X — множество вещественных чисел с обычной топологией, то внутренность множества всех целых чисел пуста. Внутренность замкнутого интервала в этом случае есть открытый интервал с теми же концами. Внутренность рациональных чисел пуста, а значит, пусто и замыкание этой внутренности. Замыкание множества рациональных чисел, как и внутренность этого замыкания, совпадает со всем X. Таким образом, внутренность замыкания множества может сильно отличаться от замыкания его внутренности. Мы видим, что оператор перехода к внутренности и оператор замыкания, вообще говоря, не коммутируют.

Есть еще один оператор, встречающийся достаточно часто для того, чтобы оправдать его определение. *Граница* подмножества A топологического пространства X состоит из всех тех точек, которые не являются внутренними ни для множества A, ни для множества $X \setminus A$. Эквивалентное определение: x является точкой границы в том и только в том случае, когда любая окрестность точки x пересекает как множество A, так и множество $X \setminus A$. Ясно, что граница множества A совпадает с границей множества $X \setminus A$. Если пространство X антидискретно и A — его непустое собственное подмножество, то границей множества A является всё X. В то же время в дискретном пространстве граница каждого множества пуста. Граница произвольного интервала вещественной прямой в обычной топологии вещественных чисел состоит лишь из концов этого интервала, независимо от того, открыт этот интервал, замкнут или полуоткрыт. Границей множества рациональных чисел, так же как и границей множества всех иррациональных чисел, служит все множество вещественных чисел.

Нетрудно обнаружить соотношения между границей, замыканием и внутренностью. Они собраны в формулировке следующей теоремы, доказательство которой мы опускаем.

10. Теорема. *Пусть A — подмножество топологического пространства X и $b(A)$ — граница множества A. Тогда $b(A)=\bar{A}\cap(\overline{X\setminus A})=\bar{A}\setminus A^0$, $X\setminus b(A)=A^0\cup(X\setminus A)^0$, $\bar{A}=A\cup b(A)$ и $A^0=A\setminus b(A)$.*

Множество замкнуто в том и только в том случае, когда ему принадлежит его граница; множество открыто тогда и только тогда, когда оно не имеет общих точек со своей границей.

БАЗЫ И ПРЕДБАЗЫ

При определении обычной топологии на множестве вещественных чисел мы отправлялись от семейства $\mathfrak{B}$ открытых интервалов — из них мы строили элементы топологии $\mathfrak{J}$. Тот же метод полезен и при других обстоятельствах; поэтому мы сейчас подробно исследуем соответствующее построение. Семейство $\mathfrak{B}$ множеств называется *базой топологии* $\mathfrak{J}$ в том и лишь в том случае, когда $\mathfrak{B}$ содержится в $\mathfrak{J}$, и для каждой точки x пространства и любой ее окрестности U существует такой элемент $V\in\mathfrak{B}$, что $x\in V\subset U$. Таким образом, семейство открытых интервалов образует базу обычной топологии на множестве вещественных чисел в силу определения обычной топологии и того факта, что открытые интервалы открыты в этой топологии.

Есть простая характеристика базы, которая часто принимается за ее определение: подсемейство $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда образует базу этой топологии, когда каждый элемент из $\mathfrak{J}$ является объединением элементов из $\mathfrak{B}$. Докажем это. Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии $\mathfrak{J}$ и $U\in\mathfrak{J}$. Обозначим через V объединение всех тех элементов базы $\mathfrak{B}$, которые лежат в U, и предположим, что $x\in U$. Тогда в $\mathfrak{B}$ существует такой элемент W, что $x\in W\subset U$. Значит, $x\in V$. Следовательно, $U\subset V$ и так как V, очевидно, является подмножеством множества U, то $V=U$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{J}$ и каждый элемент топологии $\mathfrak{J}$ является объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$. Если $U\in\mathfrak{J}$ и $x\in U$, то в совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$, объединением которых является множество U, найдется такой эле-