10. Теорема. *Пусть A — подмножество топологического пространства X и $b(A)$ — граница множества A. Тогда $b(A)=\bar{A}\cap(\overline{X\setminus A})=\bar{A}\setminus A^0$, $X\setminus b(A)=A^0\cup(X\setminus A)^0$, $\bar{A}=A\cup b(A)$ и $A^0=A\setminus b(A)$.*

Множество замкнуто в том и только в том случае, когда ему принадлежит его граница; множество открыто тогда и только тогда, когда оно не имеет общих точек со своей границей.

БАЗЫ И ПРЕДБАЗЫ

При определении обычной топологии на множестве вещественных чисел мы отправлялись от семейства $\mathfrak{B}$ открытых интервалов — из них мы строили элементы топологии $\mathfrak{J}$. Тот же метод полезен и при других обстоятельствах; поэтому мы сейчас подробно исследуем соответствующее построение. Семейство $\mathfrak{B}$ множеств называется *базой топологии* $\mathfrak{J}$ в том и лишь в том случае, когда $\mathfrak{B}$ содержится в $\mathfrak{J}$, и для каждой точки x пространства и любой ее окрестности U существует такой элемент $V\in\mathfrak{B}$, что $x\in V\subset U$. Таким образом, семейство открытых интервалов образует базу обычной топологии на множестве вещественных чисел в силу определения обычной топологии и того факта, что открытые интервалы открыты в этой топологии.

Есть простая характеристика базы, которая часто принимается за ее определение: подсемейство $\mathfrak{B}$ топологии $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда образует базу этой топологии, когда каждый элемент из $\mathfrak{J}$ является объединением элементов из $\mathfrak{B}$. Докажем это. Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии $\mathfrak{J}$ и $U\in\mathfrak{J}$. Обозначим через V объединение всех тех элементов базы $\mathfrak{B}$, которые лежат в U, и предположим, что $x\in U$. Тогда в $\mathfrak{B}$ существует такой элемент W, что $x\in W\subset U$. Значит, $x\in V$. Следовательно, $U\subset V$ и так как V, очевидно, является подмножеством множества U, то $V=U$. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{J}$ и каждый элемент топологии $\mathfrak{J}$ является объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$. Если $U\in\mathfrak{J}$ и $x\in U$, то в совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$, объединением которых является множество U, найдется такой элемент V, что $x \in V \subset U$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — база топологии $\mathfrak{J}$.

Введя понятие базы, мы получили очень удобный способ построения топологий. Однако необходима некоторая осторожность, ибо не каждое семейство множеств может служить базой какой-нибудь топологии. Например, пусть множество X состоит из чисел 0, 1 и 2, множество B состоит из чисел 0 и 1 и A состоит из 1 и 2. Семейство $\mathfrak{S}$, состоящее из X, A, B и пустого множества, не может служить базой никакой топологии. В самом деле, как убеждает нас прямое вычисление, объединение каких-либо элементов семейства $\mathfrak{S}$ непременно является элементом $\mathfrak{S}$; таким образом, если бы семейство $\mathfrak{S}$ служило базой какой-нибудь топологии, то эта топология должна была бы совпадать с $\mathfrak{S}$, но $\mathfrak{S}$ не является топологией, так как $A \cap B \notin \mathfrak{S}$. Положение проясняет следующая теорема.

11. Теорема. *Семейство $\mathfrak{B}$ множеств является базой некоторой топологии на множестве $X = \bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}\}$ в том и только в том случае, когда для любых двух элементов U и V этого семейства и каждой точки x из $U \cap V$ существует такой элемент W в $\mathfrak{B}$, что $x \in W$ и $W \subset U \cap V$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — база какой-нибудь топологии, U и V — элементы базы $\mathfrak{B}$ и $x \in U \cap V$. Тогда, так как множество $U \cap V$ открыто, в $\mathfrak{B}$ существует элемент, содержащий точку x и являющийся подмножеством множества $U \cap V$. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{B}$ — семейство с выделенными нами специальными свойствами и $\mathfrak{J}$ — семейство всевозможных объединений элементов из $\mathfrak{B}$. Объединение элементов семейства $\mathfrak{J}$ само является объединением некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{B}$ и, значит, принадлежит $\mathfrak{J}$. Остается только показать, что пересечение любых двух элементов U и V семейства $\mathfrak{J}$ снова принадлежит $\mathfrak{J}$. Если $x \in U \cap V$, то в $\mathfrak{B}$ можно найти такие элементы U' и V', что $x \in U' \subset U$ и $x \in V' \subset V$. В $\mathfrak{B}$ существует элемент W, для которого $x \in W \subset U' \cap V' \subset U \cap V$. Следовательно, множество $U \cap V$ является объединением элементов семейства $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{J}$ — топология.

Мы только что видели, что не всякое семейство $\mathfrak{S}$ множеств может служить базой топологии. Не теряя терпения, изменим несколько наш вопрос. Можно ли по произвольному семейству $\mathfrak{S}$ множеств естественно (в каком-то смысле) и однозначно определить некоторую топологию? Эта топология должна быть определена на множестве X, являющемся объединением всех элементов семейства $\mathfrak{S}$; каждый элемент семейства $\mathfrak{S}$ должен быть открыт в этой топологии, т. е. $\mathfrak{S}$ должно быть подсемейством искомой топологии. Это наводит на вопрос: существует ли наименьшая топология на X, содержащая $\mathfrak{S}$? Следующий простой пример поможет нам обнаружить эту наименьшую топологию.

12. Теорема. *Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольное непустое семейство множеств. Тогда семейство всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{S}$ образует базу некоторой топологии на множестве $X = \bigcup\{S : S \in \mathfrak{S}\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — любое семейство множеств и $\mathfrak{B}$ — семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathfrak{S}$. Тогда пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{B}$ снова является элементом $\mathfrak{B}$. Применяя предыдущую теорему, заключаем, что $\mathfrak{B}$ является базой некоторой топологии.

Семейство $\mathfrak{S}$ множеств называется *предбазой топологии* $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда семейство всевозможных конечных пересечений элементов $\mathfrak{S}$ образует базу топологии $\mathfrak{J}$ (или, что то же самое, когда каждый элемент из $\mathfrak{J}$ является объединением конечных пересечений элементов семейства $\mathfrak{S}$). В предыдущей теореме утверждается, что каждое непустое семейство $\mathfrak{S}$ множеств является предбазой некоторой топологии. Эта топология, конечно, однозначно определяется семейством $\mathfrak{S}$; она является наименьшей топологией, содержащей $\mathfrak{S}$ (т. е. эта топология содержит $\mathfrak{S}$ и является подсемейством любой топологии, содержащей $\mathfrak{S}$).

Как правило, у топологии есть много баз и предбаз; предпочтение может быть отдано той или иной из них в зависимости от решаемой задачи. Весьма естественную предбазу обычной топологии на множестве вещественных чисел образует семейство всех открытых полупрямых, т. е. семейство всех множеств вида $\{x : x > a\}$ и $\{x : x < a\}$. Каждый открытый интервал является пересечением двух таких множеств, значит, указанное семейство действительно есть предбаза. Менее очевидную предбазу обычной топологии вещественной прямой образует семейство всех множеств того же вида, где a принимает лишь рациональные значения. Эта предбаза интереснее (см. задачу 1.К).

У пространств, топология которых обладает счетной базой, есть много хороших свойств. Про такие пространства говорят, что они удовлетворяют *второй аксиоме счетности.* (Иногда в этом случае употребляются выражения *сепарабельное пространство* и *совершенно сепарабельное пространство*; мы ими пользоваться не будем.)

13. Теорема. *Пусть A — несчетное подмножество пространства, топология которого имеет счетную базу. Тогда в A есть предельная точка для A.*

Доказательство. Предположим, что ни одна точка множества A не является предельной для него, и пусть $\mathfrak{B}$ — какая-нибудь счетная база рассматриваемого пространства. Для каждой точки x из A найдется ее открытая окрестность, не содержащая точек множества A, отличных от x. Так как $\mathfrak{B}$ — база, то можно затем выбрать $B_x \in \mathfrak{B}$ так, чтобы было $B_x \cap A = \{x\}$. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками из A и элементами некоторого подсемейства семейства $\mathfrak{B}$; значит, множество A счетно.

Более сильное утверждение формулируется в задаче 1.З.

Множество A называется *плотным* в топологическом пространстве X тогда и только тогда, когда замыкание множества A есть всё X *).

Говорят, что топологическое пространство X *сепарабельно*, в том и лишь в том случае, когда существует счетное плотное в нем подмножество. Сепарабельное пространство может не удовлетворять второй аксиоме счетности. Например, пусть X — несчетное множество, топология которого состоит из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X и дополнения до всего X. В этом пространстве каждое беско-

*) В русских работах пишут в этом случае, что множество A *всюду плотно* в пространстве X. (*Прим. перев.*)

нечное подмножество плотно, ибо оно пересекается с каждым открытым множеством. Предположим, с другой стороны, что в X существует счетная база $\mathfrak{B}$, и пусть x — некоторая фиксированная точка пространства X. Пересечение всех открытых множеств, содержащих x, должно совпадать с $\{x\}$, ибо дополнение к любой точке, отличной от x, открыто. Отсюда следует, что пересечение элементов базы $\mathfrak{B}$, содержащих x, есть $\{x\}$. Но дополнение этого счетного пересечения является объединением счетного множества конечных множеств; значит, оно счетно, что ведет к противоречию. (Позже встретятся менее тривиальные примеры.) Не представляет труда доказать, что пространство со счетной базой сепарабельно.

14. Теорема. *Пространство, топология которого обладает счетной базой, сепарабельно.*

Доказательство. Выберем по точке из каждого элемента базы, получим в результате некоторое счетное множество A. Дополнение к замыканию множества A открыто и не пересекается с A, поэтому оно не содержит никакого элемента нашей базы и, значит, пусто.

Семейство $\mathfrak{A}$ называется *покрытием* множества B тогда и только тогда, когда B является подмножеством объединения $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$, т. е. когда каждая точка множества B принадлежит некоторому элементу семейства $\mathfrak{A}$. Семейство $\mathfrak{A}$ называют *открытым* покрытием множества B, если каждый элемент из $\mathfrak{A}$ является открытым множеством. *Подпокрытие* покрытия $\mathfrak{A}$ — это такое его подсемейство, которое само является покрытием.

15. Теорема. (Линделёф). *В произвольном открытом покрытии пространства со счетной базой есть счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть A — множество, $\mathfrak{A}$ — его открытое покрытие и $\mathfrak{B}$ — счетная база рассматриваемой топологии. Так как каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является объединением элементов $\mathfrak{B}$, то существует подсемейство $\mathfrak{C}$ семейства $\mathfrak{B}$, тоже покрывающее A, каждый элемент которого содержится в некотором элементе семейства $\mathfrak{A}$. Для каждого элемента покрытия $\mathfrak{C}$ зафиксируем какой-нибудь содержащий его элемент семейства

$\mathfrak{A}$. В результате получится некоторое счетное подсемейство $\mathfrak{D}$ семейства $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{D}$ — покрытие множества A, ибо $\mathfrak{C}$ покрывает A. Значит, в $\mathfrak{A}$ есть счетное подпокрытие.

Топологическое пространство называется *линделёфовым* *) тогда и только тогда, когда в каждом открытом покрытии этого пространства есть счетное подпокрытие.

Так как мы уже сказали, что такое вторая аксиома счетности, уместно сообщить, в чем состоит первая аксиома счетности. Эта аксиома касается локализованного понятия базы. Семейство окрестностей точки x называется *базой системы окрестностей* **) точки x, или *базой* ***) в x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность из этого семейства. Например, семейство всех открытых окрестностей точки всегда является базой системы окрестностей этой точки. Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если система окрестностей произвольной его точки обладает счетной базой. Ясно, что каждое топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности. С другой стороны, любое несчетное дискретное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности (у системы окрестностей произвольной точки x есть база, состоящая из единственной окрестности — множества $\{x\}$) и не удовлетворяет второй аксиоме счетности (покрытие, образованное одноточечными множествами $\{x\}$, $x \in X$, не имеет счетного подпокрытия). Вторая аксиома счетности является, следовательно, более сильным ограничением, чем первая.

Достойно внимания то обстоятельство, что если U_1, $U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная база в x, то можно построить некоторую новую счетную базу в этой точке: $V_1, V_2, \ldots$ $\ldots, V_n, \ldots$, для которой $V_n \supset V_{n+1}$ при каждом n. Построение просто: положим $V_n = \bigcap \{U_k : k \leqslant n\}$.

*) В русской литературе такие пространства обычно называются *финально компактными*. (*Прим. перев.*)

**) Говорят иногда — *базой топологии* в x. (*Прим. перев.*)

***) Термин автора *локальная база* двусмыслен — обычно под локальной базой понимают базу топологии, индуцированной в некоторой окрестности точки. (*Прим. перев.*)

Предбазой системы окрестностей в точке x, или *предбазой* в x, называется любое семейство множеств, конечные пересечения элементов которого образуют базу топологии в этой точке. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная предбаза в точке, то семейство множеств $V_1, V_2, \ldots \ldots, V_n, \ldots$, где $V_n = \bigcap\{U_k : k \leqslant n\}$, образует счетную базу в этой точке. Значит, из существования счетной предбазы в каждой точке вытекает первая аксиома счетности.

ПЕРЕХОД К ИНДУЦИРОВАННОЙ ТОПОЛОГИИ; ОТДЕЛЕННОСТЬ

Пусть $(X, \mathfrak{T})$ — топологическое пространство и Y — его подмножество. В этом случае можно определить некоторую топологию $\mathfrak{U}$ на множестве Y, называемую обычно топологией, *индуцированной топологией* $\mathfrak{T}$ на Y, или *сужением* топологии $\mathfrak{T}$ на множество Y. Индуцированная топология $\mathfrak{U}$ определяется как семейство пересечений всевозможных элементов $\mathfrak{T}$ с множеством Y. Таким образом, множество U принадлежит индуцированной топологии $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда $U = V \cap Y$ для некоторого $\mathfrak{T}$-открытого множества V. Легко видеть, что $\mathfrak{U}$ действительно является топологией. Про элементы U индуцированной топологии говорят, что они *открыты* в Y, а их относительные дополнения $Y \setminus U$ называют множествами, *замкнутыми* в Y. $\mathfrak{U}$-замыкание подмножества пространства Y называется его *замыканием* в Y. Каждое множество Y пространства X одновременно открыто и замкнуто в себе, хотя в X оно может быть и не открыто, и не замкнуто. Топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathfrak{T})$. Более формальное определение: топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством другого пространства $(X, \mathfrak{T})$ в том и только в том случае, когда $Y \subset X$ и $\mathfrak{U}$ — топология, индуцированная топологией $\mathfrak{T}$.

Стоит отметить, что если $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{T})$ и $(Z, \mathfrak{B})$— подпространство пространства $(Y, \mathfrak{U})$, то $(Z, \mathfrak{B})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{T})$. Это свойство транзитивно-