Предбазой системы окрестностей в точке x, или *предбазой* в x, называется любое семейство множеств, конечные пересечения элементов которого образуют базу топологии в этой точке. Если $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная предбаза в точке, то семейство множеств $V_1, V_2, \ldots$ $\ldots, V_n, \ldots$, где $V_n = \bigcap\{U_k : k \leqslant n\}$, образует счетную базу в этой точке. Значит, из существования счетной предбазы в каждой точке вытекает первая аксиома счетности.

ПЕРЕХОД К ИНДУЦИРОВАННОЙ ТОПОЛОГИИ; ОТДЕЛЕННОСТЬ

Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство и Y — его подмножество. В этом случае можно определить некоторую топологию $\mathfrak{U}$ на множестве Y, называемую обычно топологией, *индуцированной топологией* $\mathfrak{J}$ на Y, или *сужением* топологии $\mathfrak{J}$ на множество Y. Индуцированная топология $\mathfrak{U}$ определяется как семейство пересечений всевозможных элементов $\mathfrak{J}$ с множеством Y. Таким образом, множество U принадлежит индуцированной топологии $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда $U = V \cap Y$ для некоторого $\mathfrak{J}$-открытого множества V. Легко видеть, что $\mathfrak{U}$ действительно является топологией. Про элементы U индуцированной топологии говорят, что они *открыты* в Y, а их относительные дополнения $Y \setminus U$ называют множествами, *замкнутыми* в Y. $\mathfrak{U}$-замыкание подмножества пространства Y называется его *замыканием* в Y. Каждое множество Y пространства X одновременно открыто и замкнуто в себе, хотя в X оно может быть и не открыто, и не замкнуто. Топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ называется *подпространством* пространства $(X, \mathfrak{J})$. Более формальное определение: топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством другого пространства $(X, \mathfrak{J})$ в том и только в том случае, когда $Y \subset X$ и $\mathfrak{U}$ — топология, индуцированная топологией $\mathfrak{J}$.

Стоит отметить, что если $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{J})$ и $(Z, \mathfrak{B})$— подпространство пространства $(Y, \mathfrak{U})$, то $(Z, \mathfrak{B})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{J})$. Это свойство транзитивности будет часто применяться без специального на то указания.

Пусть пространство $(Y, \mathfrak{U})$ является подпространством пространства $(X, \mathfrak{J})$ и A — подмножество множества Y. Может случиться тогда, что A $\mathfrak{J}$-замкнуто или $\mathfrak{U}$-замкнуто, точка y может быть $\mathfrak{U}$-предельной точкой для множества A и может быть $\mathfrak{J}$-предельной точкой для A *). Соотношения между этими различными понятиями важны для нас.

16. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство, $(Y, \mathfrak{U})$ — его подпространство и A — множество в Y. Тогда:*

(а) *множество A $\mathfrak{U}$-замкнуто в том и только в том случае, когда оно является пересечением множества Y с некоторым $\mathfrak{J}$-замкнутым множеством;*

(б) *точка $y \in Y$ является $\mathfrak{U}$-предельной точкой для множества A в том и только в том случае, когда она является $\mathfrak{J}$-предельной точкой для A;*

(в) *$\mathfrak{U}$-замыкание множества A есть пересечение множества Y и $\mathfrak{J}$-замыкания множества A.*

Доказательство. Множество A замкнуто в Y тогда и только тогда, когда его относительное дополнение $Y \setminus A$ имеет вид $V \cap Y$, где V — некоторое $\mathfrak{J}$-открытое множество. Но последнее имеет место тогда и только тогда, когда $A = (X \setminus V) \cap Y$ для некоторого V из $\mathfrak{J}$. Этим доказано утверждение (а). Утверждение (б) непосредственно следует из определения индуцированной топологии и из определения предельной точки. $\mathfrak{U}$-замыкание множества A представляет собой объединение множества A и множества всех его $\mathfrak{U}$-предельных точек; следовательно, в силу (б) оно является пересечением множества Y с $\mathfrak{J}$-замыканием множества A.

Если $(Y, \mathfrak{U})$ — подпространство пространства $(X, \mathfrak{J})$ а множество Y открыто в X, то каждое открытое в Y множество открыто и в X, как пересечение открытого в X множества с множеством Y. Верно и аналогичное утверждение для замкнутых множеств. Как правило, однако, то обстоятельство, что множество открыто или замкнуто в подпространстве, еще очень мало говорит

*) Наконец, всего этого может не быть! (*Прим. перев.*)

о расположении этого множества во всем пространстве X. Если множество X является объединением множеств Y и Z, и A — такое подмножество пространства X, что $A \cap Y$ открыто в Y и $A \cap Z$ открыто в Z, то, казалось бы, можно надеяться, что множество A открыто в X. Однако это не всегда так. В самом деле, пусть Y — произвольное подмножество пространства X и $Z = X \setminus Y$; тогда множества $Y \cap Y$ и $Y \cap Z$ открыты в Y и Z соответственно. В одном важном случае наша гипотеза оправдывается. Говорят, что подмножества A и B *отделены* в топологическом пространстве X, в том и лишь в том случае, когда оба множества $\bar{A} \cap B$ и $A \cap \bar{B}$ пусты. Это определение отделенности предполагает, что на множестве X задана операция замыкания. Однако зависимость от топологии на X в значительной степени иллюзорна: множества A и B отделены в X в том и только в том случае, когда ни в A, ни в B не только нет точек другого множества, но нет и предельных точек другого множества. Это утверждение можно переформулировать в терминах индуцированной топологии на $A \cup B$ в силу утверждения (б) теоремы 16 следующим образом: оба множества A и B замкнуты в $A \cup B$ (или, что эквивалентно, множество A (или B) открыто и замкнуто одновременно в подпространстве $A \cup B$) и не пересекаются. Для примера отметим, что интервалы $(0,1)$ и $(1,2)$ — отделенные подмножества пространства вещественных чисел в обычной топологии, хотя и существует точка 1, принадлежащая замыканию обоих. Однако множество $(0,1)$ не отделено от замкнутого отрезка $[1, 2]$, ибо точка 1, принадлежащая множеству $[1, 2]$, служит предельной точкой для $(0,1)$.

В последующем нам понадобятся три теоремы об отделенности.

17. Теорема. *Пусть подмножества Y и Z топологического пространства X либо оба открыты в X, либо оба замкнуты в X. Тогда множество $Y \setminus Z$ отделено от множества $Z \setminus Y$.*

Доказательство. Предположим, что Y и Z — замкнутые подмножества пространства X. Тогда множества Y и Z замкнуты и в подпространстве $Y \cup Z$. Следовательно, $Y \setminus Z = (Y \cup Z) \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ — множества, открытые в $Y \cup Z$. Отсюда следует, что оба множества: $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ — открыты в подпространстве $(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$, а так как они являются взаимно дополняющими подмножествами этого подпространства, то каждое из них замкнуто в $(Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)$. Следовательно, $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены. В случае, когда Z и Y открыты в X, применимо двойственное рассуждение.

18. Теорема. *Пусть топологическое пространство X является объединением таких своих подмножеств Y и Z, что множества $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены. Тогда замыкание в X множества $A \subset X$ является объединением замыкания в Y множества $A \cap Y$ и замыкания в Z множества $A \cap Z$.*

Доказательство. Замыкание объединения двух множеств является объединением их замыканий. Следовательно, $\bar{A} = (\overline{A \cap Y}) \cup (\overline{A \cap Z \setminus Y})$. Значит, $\bar{A} \cap Y = [(\overline{A \cap Y}) \cap Y] \cup [(\overline{A \cap Z \setminus Y}) \cap Y]$. Множество $\overline{Z \setminus Y}$ не пересекается с $\overline{Y \setminus Z}$; следовательно, $(\overline{Z \setminus Y}) \subset Z$, откуда вытекает, что $(\overline{A \cap Z \setminus Y})$ является подмножеством множества $(\overline{A \cap Z}) \cap Z$. Подобным же образом доказывается, что множество $\bar{A} \cap Z$ можно представить как объединение множества $(\overline{A \cap Z}) \cap Z$ и некоторого подмножества множества $(\overline{A \cap Y}) \cap Y$. Следовательно, $\bar{A} = (\bar{A} \cap Y) \cup \cup (\bar{A} \cap Z) = [(\overline{A \cap Y}) \cap Y] \cup [(\overline{A \cap Z}) \cap Z]$. Теорема доказана.

19. Следствие. *Пусть топологическое пространство X является объединением таких множеств Y и Z, что множества $Y \setminus Z$ и $Z \setminus Y$ отделены. Тогда подмножество A пространства X замкнуто (открыто) в том и только в том случае, когда замкнуто (открыто) множество $A \cap Y$ в Y и замкнуто (открыто) множество $A \cap Z$ в Z.*

Доказательство. Если множества $A \cap Y$ и $A \cap Z$ замкнуты в подпространствах Y и Z соответственно, то в силу предыдущей теоремы A непременно совпадает со своим замыканием и потому замкнуто. Если $A \cap Y$ и $A \cap Z$ открыты в Y и Z соответственно, то множества $Y \cap X \setminus A$ и $Z \cap X \setminus A$ замкнуты в пространствах Y и Z и, значит, множество $X \setminus A$ замкнуто, а множество A открыто.