СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА

Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *связным* тогда и только тогда, когда множество X нельзя представить в виде объединения двух непустых отделенных подмножеств. Говорят, что подмножество Y пространства X связно, в том и только в том случае, когда топологическое пространство Y с индуцированной топологией связно. Эквивалентно: множество Y связно тогда и только тогда, когда Y не является объединением никаких двух отделенных подмножеств. Еще один критерий связности вытекает из рассмотрения отношения отделенности: множество Y связно в том и только в том случае, когда единственными подмножествами подпространства Y, открытыми и замкнутыми в нем одновременно, являются все Y и пустое множество. Отсюда сразу следует, что любое антидискретное пространство связно. Дискретное пространство, в котором больше одной точки, не связно. Вещественные числа с обычной топологией образуют связное пространство (задача 1.K), но пространство рациональных чисел, топология которого индуцируется обычной топологией вещественных чисел, не связно. (Ибо для любого иррационального числа a множества $\{x : x<a\}$ и $\{x : x>a\}$ отделены.)

20. Теорема. *Замыкание связного множества связно.*

Доказательство. Пусть Y — связное подмножество некоторого топологического пространства и $\overline{Y}=A\cup B$, где каждое из множеств A и B одновременно открыто и замкнуто в $\overline{Y}$. Тогда каждое из множеств $A\cap Y$ и $B\cap Y$ открыто и замкнуто в Y и, так как Y связно, одно из этих двух множеств должно быть пусто. Пусть $B\cap Y$ пусто. Тогда Y является подмножеством множества A, а значит, и $\overline{Y}$ является подмножеством множества A, так как A замкнуто в $\overline{Y}$. Следовательно, B пусто, а это означает, что множество $\overline{Y}$ связно.

Есть иная формулировка этой теоремы, которая на первый взгляд сильнее данной нами. Вот она: если Y — связное подмножество пространства X и Z — такое подмножество, что $Y\subset Z\subset\overline{Y}$, то Z связно. Однако это утверждение получается немедленно, если применить предшествующую теорему к пространству Z с индуцированной топологией.

21. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *некоторое семейство связных подмножеств топологического пространства. Если никакие два элемента семейства* $\mathfrak{A}$ *не отделены, то множество* $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ *связно.*

Доказательство. Обозначим через C объединение элементов семейства $\mathfrak{A}$, и пусть D — его подмножество, одновременно открытое и замкнутое в C. Тогда для каждого A из $\mathfrak{A}$ множество $A \cap D$ открыто и замкнуто в A. Так как множество A связно, то либо $A \subset D$, либо $A \subset C \setminus D$. Если теперь A и B — элементы семейства $\mathfrak{A}$, то включения $A \subset D$ и $B \subset C \setminus D$ не могут выполняться одновременно, — в противном случае множества A и B, будучи соответственно подмножествами отделенных множеств D и $C \setminus D$, были бы сами отделены. Следовательно, либо каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является подмножеством множества $C \setminus D$, и тогда множество D пусто, либо каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является подмножеством множества D, и тогда множество $C \setminus D$ пусто.

Компонентой топологического пространства называется любое его максимальное связное подмножество, т. е. такое связное подмножество, которое не является собственной частью никакого другого связного подмножества. Компонентой подмножества A топологического пространства называется любая компонента множества A, наделенного индуцированной топологией. Если пространство связно, то оно является единственной своей компонентой. Если пространство дискретно, то каждая его компонента состоит из одной точки. Конечно, существует много и недискретных пространств, все компоненты которых одноточечны, — таково, например, пространство рациональных чисел с (индуцированной) обычной топологией.

22. Теорема. *Каждое связное подмножество топологического пространства содержится в некоторой компоненте этого пространства, и каждая компонента замкнута. Различные компоненты топологического пространства отделены.*

Доказательство. Пусть A — непустое связное подмножество топологического пространства и C — объединение всех связных множеств, содержащих A. В силу предшествующей теоремы множество C непременно связно, и если D — какое-нибудь связное множество, содержащее C, то $D \subset C$ и тогда $D = C$. Значит, C — компонента. (Если множество A пусто, а пространство не пусто, то каждое одноточечное подмножество пространства содержится в некоторой его компоненте, значит, и A содержится в этой компоненте.) Каждая компонента C связна, и в силу теоремы 1.20 ее замыкание $\bar{C}$ тоже связно. Значит, C совпадает с $\bar{C}$, т. е. множество C замкнуто. Если A и B — различные компоненты и не отделены, то их объединение в силу теоремы 1.21 связно, что ведет к противоречию

Хорошо завершить наши замечания о компонентах следующим предостережением. Если точки x и y принадлежат одной компоненте топологического пространства, то они всегда попадают в одну половину любого разделения пространства, т. е. если пространство является объединением отделенных множеств A и B, то либо обе точки x, y принадлежат A, либо обе они принадлежат B. Обратное к этому утверждение не верно. Может случиться, что две точки всегда попадают в одну половину любого разделения пространства и тем не менее лежат в разных его компонентах. (См. задачу 1.Р.)

ЗАДАЧИ

А. Наибольшая и наименьшая топологии

(а) Пересечение любого семейства топологий на X является топологией на X.

(б) Объединение двух топологий на X может не быть топологией на X (если в X больше двух точек).

(в) Для любого семейства топологий на X существует единственная наибольшая из всех топологий, меньших каждой топологии из этого семейства, и существует единственная наименьшая из всех топологий, бо́льших каждой топологии из этого семейства.

Б. Топологии, возникающие из систем окрестностей

(а) Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство; для каждой точки $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{U}_x$ семейство всех ее окрестностей. Тогда:

1) Если $U \in \mathfrak{U}_x$, то $x \in U$.
2) Если U и V — элементы системы $\mathfrak{U}_x$, то и $U \cap V \in \mathfrak{U}_x$.
3) Если $U \in \mathfrak{U}_x$ и $U \subset V$, то $V \in \mathfrak{U}_x$.