единение всех связных множеств, содержащих A. В силу предшествующей теоремы множество C непременно связно, и если D — какое-нибудь связное множество, содержащее C, то $D \subset C$ и тогда $D = C$. Значит, C — компонента. (Если множество A пусто, а пространство не пусто, то каждое одноточечное подмножество пространства содержится в некоторой его компоненте, значит, и A содержится в этой компоненте.) Каждая компонента C связна, и в силу теоремы 1.20 ее замыкание $\bar{C}$ тоже связно. Значит, C совпадает с $\bar{C}$, т. е. множество C замкнуто. Если A и B — различные компоненты и не отделены, то их объединение в силу теоремы 1.21 связно, что ведет к противоречию

Хорошо завершить наши замечания о компонентах следующим предостережением. Если точки x и y принадлежат одной компоненте топологического пространства, то они всегда попадают в одну половину любого разделения пространства, т. е. если пространство является объединением отделенных множеств A и B, то либо обе точки x, y принадлежат A, либо обе они принадлежат B. Обратное к этому утверждение не верно. Может случиться, что две точки всегда попадают в одну половину любого разделения пространства и тем не менее лежат в разных его компонентах. (См. задачу 1.P.)

ЗАДАЧИ

A. Наибольшая и наименьшая топологии

(а) Пересечение любого семейства топологий на X является топологией на X.

(б) Объединение двух топологий на X может не быть топологией на X (если в X больше двух точек).

(в) Для любого семейства топологий на X существует единственная наибольшая из всех топологий, меньших каждой топологии из этого семейства, и существует единственная наименьшая из всех топологий, бо́льших каждой топологии из этого семейства.

Б. Топологии, возникающие из систем окрестностей

(а) Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство; для каждой точки $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{U}_x$ семейство всех ее окрестностей. Тогда:

1) Если $U \in \mathfrak{U}_x$, то $x \in U$.
2) Если U и V — элементы системы $\mathfrak{U}_x$, то и $U \cap V \in \mathfrak{U}_x$.
3) Если $U \in \mathfrak{U}_x$ и $U \subset V$, то $V \in \mathfrak{U}_x$.

4) Если $U \in \mathfrak{U}_x$, то найдется элемент $V \in \mathfrak{U}_x$ такой, что $V \subset U$ и $V \in \mathfrak{U}_y$ для каждой y из V (иными словами, множество V должно быть окрестностью каждой из своих точек).

(б) Если функция $\mathfrak{U}$ ставит в соответствие произвольной точке $x \in X$ некоторое семейство $\mathfrak{U}_x$ и удовлетворяет условиям 1), 2) и 3), то семейство $\mathfrak{J}$ всех таких множеств, что $U \in \mathfrak{U}_x$, коль скоро $x \in U$, есть некоторая топология на X. Если условие 4) тоже выполняется, то $\mathfrak{U}_x$ представляет собой в точности систему окрестностей точки x относительно топологии $\mathfrak{J}$.

Замечание. Различные способы задания топологического пространства интенсивно исследовались. Три аксиомы замыкания Куратовского можно заменить одним условием, как показали Монтейро [1] и Исеки [1]. Можно положить в основу также понятие отделенности (Уоллес [1], Кришна Мурти [1] и Шиманский [1]). Понятие производного множества тоже можно было бы принять за исходное (см. об этом, например, работы Монтейро [2] и Рибейро [3]). Соотношения между различными операциями исследовались Стофером [1].

В. Задание топологии через оператор ядра

Пусть ^{i} — оператор, который переводит подмножества множества X в подмножества множества X, и $\mathfrak{J}$ — семейство всех таких множеств, что $A^i = A$.

При каких условиях $\mathfrak{J}$ будет топологией, а ^{i} (одновременно) — оператором перехода к ядру?

Г. Предельные точки в T_1-пространствах

Топологическое пространство называется *T_1-пространством* тогда и только тогда, когда каждое его одноточечное подмножество замкнуто. (Иногда, допуская вольность речи, мы в этом случае говорим, что «точка замкнута».)

(а) На каждом множестве X есть единственная наименьшая топология $\mathfrak{J}$ такая, что $(X, \mathfrak{J})$ — T_1-пространство.

(б) Если множество X бесконечно и $\mathfrak{J}$ — наименьшая топология такая, что $(X, \mathfrak{J})$ — T_1-пространство, то $(X, \mathfrak{J})$ связно.

(в) Если $(X, \mathfrak{J})$ — T_1-пространство, то множество предельных точек произвольного его подмножества замкнуто. Более сильный результат (Янг): для того чтобы множество предельных точек произвольного подмножества было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы было замкнуто множество предельных точек множества $\{x\}$, где x — любая точка из X

Замечание. Существует возрастающая цепочка ограничений этого рода на топологию пространства. Топологическое пространство называется *T_0-пространством* в том и лишь в том случае, когда для каждой пары различных точек x и y этого пространства по крайней мере у одной из них есть окрестность, не содержащая другой *). Чуть-чуть иначе это можно сказать так: пространство

*) T_0-пространства выделены А. Н. Колмогоровым. (*Прим. перев.*)

является T_0-пространством тогда и только тогда, когда для любых различных точек x и y будет либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$. Позднее мы определим T_2- и T_3-пространства. Терминология принадлежит П. С. Александрову и Х. Хопфу [1].

Д. Задача Куратовского о замыканиях и дополнениях

Пусть A — подмножество топологического пространства. Оказывается, можно построить самое большее 14 множеств, применяя к A операции замыкания и перехода к (относительному) дополнению. Существует подмножество пространства вещественных чисел (с обычной топологией), из которого можно таким образом получить ровно 14 различных множеств. (Заметим, прежде всего, что если A — замыкание открытого множества, то A является замыканием ядра множества A. Значит, для таких A будет $A = \overline{(\overline{A'})'}$, где $'$ символизирует переход к дополнению.)

Е. Упражнение, касающееся пространств со счетной базой

Если топология пространства имеет счетную базу, то каждая база этого пространства содержит некоторую его счетную базу.

Ж. Упражнение, касающееся понятия плотности

Если множество A плотно в топологическом пространстве, а множество U открыто, то $U \subset \overline{A \cap U}$.

З. Предельные точки

Пусть каждое подпространство топологического пространства X является линделёфовым пространством, A — некоторое его несчетное подмножество и B — множество всех точек $x \in A$, любая окрестность которых содержит несчетное множество элементов множества A *). Тогда множество $A \setminus B$ счетно и, значит, любая окрестность произвольной точки множества B содержит несчетное множество точек из B.

Замечание. Можно классифицировать предельные точки множества A в соответствии с наименьшей мощностью пересечения множества A с окрестностями таких точек. Если есть ограничения на мощность базы пространства, то должны выполняться определенные неравенства для мощностей этих множеств. Теоремы 1.13, 1.14 и 1.15 можно обобщить на пространства с базой произвольной мощности.

И. Порядковая топология

Пусть X — множество, линейно упорядоченное антисимметричным отношением $<$ (антисимметричность означает, что соотношение $x<x$ не имеет места ни для какого x).

---

*) У нас такие точки называются *точками конденсации* множества A *(Прим. перев.)*

Порядковая топология *) ($<$-порядковая топология) имеет предбазой семейство всех множеств вида $\{x : x<a\}$ и $\{x : a<x\}$, где a пробегает X.

(а) Порядковая топология на X — это наименьшая из всех топологий, относительно которых порядок непрерывен в следующем смысле: для любых a и b из X таких, что $a<b$, существуют окрестность U точки a и окрестность V точки b, для которых из $x \in U$ и $y \in V$ следует, что $x<y$.

(б) Пусть Y — подмножество множества X, линейно упорядоченного отношением $<$. Тогда Y само линейно упорядочено отношением $<$, однако $<$-порядковая топология на Y может не совпадать с топологией, индуцированной на Y $<$-порядковой топологией множества X.

(в) Если пространство X связно относительно порядковой топологии, то порядок на X полон. (Это означает, что каждое ограниченное непустое подмножество множества X имеет наименьшую верхнюю грань.)

(г) Если в X существуют такие точки a и b, что $a<b$, и нет точки $c \in X$, которая удовлетворяла бы соотношениям $a<c<b$, то X не связно. Про такое упорядочение говорят, что в нем есть *дыра*. Показать, что X связно относительно порядковой топологии тогда и только тогда, когда порядок, заданный на X, полон и в X нет дыр.

К. *Свойства вещественных чисел*

Пусть R — множество вещественных чисел с обычной топологией.

(а) Подгруппа аддитивной группы вещественных чисел, в которой больше одного элемента, либо плотна в R, либо имеет наименьший положительный элемент. В частности, множество рациональных чисел плотно в R.

(б) Обычная топология множества вещественных чисел совпадает с его порядковой топологией. У обычной топологии есть счетная база.

(в) Замкнутая подгруппа группы R либо счетна, либо совпадает с R. Связная подгруппа группы R есть либо $\{0\}$, либо R, а любая открытая подгруппа обязательно совпадает с R.

(г) (*Морс*). *Собственным* интервалом называется полуоткрытый, открытый или замкнутый интервал вещественной прямой, содержащий больше одной точки. Пусть $\mathfrak{A}$ — какое угодно семейство собственных интервалов. Тогда существует такое счетное подсемейство $\mathfrak{B}$ семейства $\mathfrak{A}$, что $\bigcup \{B : B \in \mathfrak{B}\} = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}$. (Заметьте, что семейство непересекающихся интервалов всегда счетно, и покажите, что все точки множества $U = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}$, за исключением счетного подмножества, являются внутренними точками множества U).

(д) Семейство $\mathfrak{S}$ всех собственных интервалов образует предбазу дискретной топологии $\mathfrak{J}$ на R. Пространство $(R, \mathfrak{J})$ не

---

*) Можно говорить также «топология порядка». (*Прим. перев.*)

является линделёфовым, хотя из каждого его покрытия элементами семейства $\mathfrak{S}$ можно выбрать счетное подпокрытие. (Положение вещей, противоположное теореме 5.6 Александера.)

Замечание. Дальнейшие свойства вещественных чисел указаны в формулировке следующей задачи.

Л. Стрелка (пространство полуоткрытых интервалов)

Пусть X — множество вещественных чисел и $\mathfrak{J}$ — топология на X, базой которой является семейство $\mathfrak{B}$ всех полуоткрытых интервалов вида $[a, b)=\{x : a\leqslant x<b\}$, где a и b — вещественные числа. $\mathfrak{J}$-предельные точки множества называются *предельными точками справа* для него; предельные точки слева определяются аналогично.

(а) Элементы базы $\mathfrak{B}$ одновременно открыты и замкнуты. Пространство $(X, \mathfrak{J})$ не связно.

(б) Пространство $(X, \mathfrak{J})$ сепарабельно, но у $\mathfrak{J}$ нет счетной базы. (Для каждой точки $x\in X$ в любой базе должен быть элемент, наибольшей нижней гранью которого она является.)

(в) Каждое подпространство пространства $(X, \mathfrak{J})$ является линделёфовым пространством. (См. 1. К(г).)

(г) Пусть A — подмножество множества вещественных чисел; множество всех его предельных точек, не являющихся предельными точками справа по отношению к A, счетно. Более общее утверждение: множество всех точек из A, которые не являются предельными для него одновременно и справа и слева, счетно. (См. 1. З.)

(д) Каждое подпространство пространства $(X, \mathfrak{J})$ сепарабельно.

М. Пространство полуоткрытых прямоугольников

Пусть $Y=X\times X$, где X — пространство из предыдущей задачи, и $\mathfrak{U}$ — топология, базу которой образует семейство всех множеств вида $A\times B$, где A и B — элементы топологии $\mathfrak{J}$, описанной в предыдущем примере.

(а) Пространство $(Y, \mathfrak{U})$ сепарабельно.

(б) В пространстве $(Y, \mathfrak{U})$ есть несепарабельное подпространство (например, таково $\{(x, y) : x+y=1\}$).

(в) Пространство $(Y, \mathfrak{U})$ не линделёфово. (Если в каждом открытом покрытии пространства Y есть счетное подпокрытие, то и любое его замкнутое подпространство обладает тем же свойством. Рассмотрите множество $\{(x, y) : x+y=1\}$, наделенное индуцированной топологией.)

Замечание. Пространства, описанные в формулировках задач 1. Л и 1. М, относятся к числу постоянно применяемых противоречащих примеров общей топологии. Другие патологические черты этих пространств мы перечисляем, формулируя задачу 4. И. Халмош первым заметил, что произведение (в смысле, который будет уточнен в главе 3) линделёфовых пространств может не быть линделёфовым пространством.

Н. *Пример, касающийся первой и второй аксиом счетности*

Обозначим через Ω' множество всех порядковых чисел, меньших или равных первого несчетного порядкового числа Ω; пусть $X=\Omega'\setminus\{\Omega\}$ и ω — множество всех неотрицательных целых чисел; каждое из этих множеств наделим порядковой топологией.

(а) Пространство ω дискретно и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

(б) Пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности и не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

(в) Пространство Ω' не удовлетворяет ни первой, ни второй аксиомам счетности; каждое сепарабельное подмножество U пространства Ω' само счетно.

О. *Условие Суслина*

Топологическое пространство удовлетворяет *условию Суслина* тогда и только тогда, когда каждое семейство непересекающихся открытых множеств этого пространства счетно. Каждое сепарабельное пространство удовлетворяет условию Суслина, но не наоборот. (Пример: несчетное множество, топологию которого составляют пустое множество и дополнения до всевозможных счетных подмножеств.) Есть более сложные примеры пространств (см., например, пространство Хелли из 5. Н), удовлетворяющих первой аксиоме счетности и сепарабельных, но лишенных счетной базы.

П. *Евклидова плоскость*

Евклидова плоскость — это множество всех упорядоченных пар вещественных чисел, а обычная топология на плоскости имеет базой семейство всевозможных произведений $A\times B$, где A и B — открытые интервалы с рациональными концами. Эта база счетна; следовательно, плоскость сепарабельна

(а) Базой обычной топологии плоскости служит семейство всевозможных открытых кругов — множеств вида $\{(x,y):(x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$, где a, b и r — рациональные числа.

(б) Пусть X — множество всех тех точек плоскости, хотя бы одна координата которых иррациональна; наделим X индуцированной топологией. Тогда X связно.

Р. *Пример на понятие компоненты*

Через X обозначим следующее подмножество евклидовой плоскости с топологией, индуцированной обычной топологией этой плоскости. Для каждого целого положительного числа n положим $A_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]$, где $[0,1]$ — замкнутый интервал; множество X мы получим, присоединив точки $(0,0)$ и $(0,1)$ к объединению множеств A_n. Множества $\{(0,0)\}$ и $\{(0,1)\}$ являются компонентами пространства X, но любое открытое и замкнутое подмножество пространства X либо не содержит ни одной из этих точек, либо содержит обе.

С. *Теорема об отделенных множествах*

Если X — связное топологическое пространство, Y — его связное подмножество и $X\setminus Y=A\cup B$, где A и B — отделенные множества, то $A\cup Y$ связно.

Т. Теорема о конечных цепях для связных множеств

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство связных подмножеств топологического пространства, удовлетворяющее условию: если A и B принадлежат $\mathfrak{A}$, то существует конечная последовательность $A_0, A_1, \ldots, A_n$ элементов $\mathfrak{A}$ такая, что $A_0 = A$, $A_n = B$ и для каждого i множества A_i и A_{i+1} не отделены. Тогда множество $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ связно. Выведите отсюда утверждение 1.21.

У. Локально связные пространства

Топологическое пространство называется *локально связным* тогда и только тогда, когда для каждой точки x и любой ее окрестности U компонента множества U, содержащая точку x, является ее окрестностью.

(а) Каждая компонента открытого множества локально связного пространства открыта.

(б) Топологическое пространство локально связно в том и только в том случае, когда семейство всех его открытых связных подмножеств образует базу.

(в) Если точки x и y локально связного пространства X принадлежат разным его компонентам, то существуют такие отделенные подмножества A и B пространства X, что $x \in A$, $y \in B$ и $X = A \cup B$.

Замечание. По поводу многих других свойств локально связных пространств и обобщений см. Уайберн [1] и Уайлдер [1].

Ф. Теорема Брауэра о редукции

Обычная формулировка этой теоремы такова. Пусть топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Свойство P подмножеств пространства X называется *индуктивным* тогда и только тогда, когда из того, что каждый элемент счетного гнезда замкнутых множеств обладает свойством P, следует, что им обладает и их пересечение. Множество A называется *неприводимым* относительно свойства P в том и только в том случае, когда никакое собственное замкнутое подмножество множества A не обладает свойством P. Тогда если замкнутое подмножество A пространства X имеет свойство P, то в A существует неприводимое замкнутое подмножество со свойством P.

Эту теорему можно выразить более формально в терминах семейства множеств (семейства всех множеств, обладающих P).

(а) Сформулируйте и докажите теорему в этой формулировке. Предположите, что каждое подпространство рассматриваемого пространства линделёфово.

(б) Верно ли какое-нибудь общее утверждение этого рода для произвольного топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$? (См. 0,25.)