Глава 2

СХОДИМОСТЬ ПО МОРУ—СМИТУ

ВВЕДЕНИЕ

Эта глава посвящена изучению сходимости по Мору — Смиту. Мы узна́ем, что топологию пространства всегда можно описать в терминах сходимости, — такому описанию и посвящена бо́льшая часть данной главы. Мы охарактеризуем также те связанные со сходимостью понятия, которые можно описать в терминах сходимости относительно некоторой топологии. Наш проект преследует ту же цель, что и теория операторов замыкания Куратовского; он даст нам удобный и интуитивно естественный путь выделения определенных топологий. Однако значение теории сходимости простирается далеко за пределы этого частного применения — фундаментальные конструкции анализа основаны на предельном переходе. Мы заинтересованы в построении теории, которая была бы приложима к вопросам сходимости последовательностей, двойных последовательностей, при суммировании рядов, к вопросам, связанным с дифференцированием и интегрированием. Теория, развиваемая ниже, никоим образом не является единственно возможной, но она, без сомнения, наиболее естественная.

Понятие сходящейся последовательности образует основу, на которой строится вся теория; поэтому мы выпишем немногие определения и теоремы о последовательностях, чтобы дать эту основу. В дальнейшем эти теоремы окажутся частными случаями более общих теорем.

Последовательность есть функция, определенная на множестве ω неотрицательных целых чисел. Последовательность вещественных чисел — эта такая последовательность, областью значений которой служит некоторое подмножество множества вещественных чисел. Значение последовательности S на элементе n обозначается либо через S_n, либо через $S(n)$. Говорят, что последовательность S является последовательностью в множестве A, тогда и только тогда, когда $S_n \in A$ для каждого неотрицательного целого числа n. Говорят, что последовательность S с некоторого момента лежит в множестве A, тогда и только тогда, когда существует такое целое число m, что $S_n \in A$ для всех $n \geqslant m$. Последовательность вещественных чисел *сходится* к числу s относительно обычной топологии *) в том и только в том случае, когда, начиная с некоторого момента, она лежит в произвольной окрестности точки s. При пользовании этими определениями выясняется, что в пространстве вещественных чисел (с обычной топологией) точка s тогда и только тогда принадлежит замыканию множества A, когда в A есть последовательность, сходящаяся к s, и что точка s является предельной для множества A тогда и только тогда, когда в $A \setminus \{s\}$ существует последовательность, сходящаяся к s.

Мы хотим строить подпоследовательности последовательностей. Последовательность S может не сходиться ни к какой точке, и все же может оказаться возможным выделить из нее сходящуюся последовательность в результате подходящего построения. Мы желаем так выбрать целое число N_i для каждого i из ω, чтобы последовательность S_{N_i} сходилась. Это можно сформулировать иначе: мы хотим найти такую последовательность N целых чисел, что композиция $S \circ N(i) = S_{N_i} = S(N(i))$ сходится. Если никаких других ограничений нет, то это сделать легко: положим $N_i = 0$ для каждого i. Тогда последовательность $S \circ N$ сходится к S_0, так как $S \circ N(i) = S_0$ при каждом i. Конечно, надо наложить дополнительное условие, которое связало бы поведение подпоследовательности с поведением последовательности при больших номерах. Обычное условие заключается в том, что последовательность N должна быть строго монотонно возрастающей, т. е. если $i > j$, то должно быть $N_i > N_j$. Это — неоправданно сильное условие; вместо него

*) Иногда говорят, что последовательность «сходится в обычной топологии». (*Прим. перев.*)

мы потребуем, чтобы, когда i становилось велико, N_i тоже становилось велико. Формально: T есть подпоследовательность последовательности S тогда и только тогда, когда существует последовательность N неотрицательных целых чисел, для которой $T=S\circ N$ (эквивалентно, $T_i=S_{N_i}$ при каждом i), такая, что, каково бы ни было целое число m, найдется целое число n со свойством: $N_i \geqslant m$, коль скоро $i \geqslant n$.

Точки, к которым сходятся подпоследовательности заданной последовательности, удовлетворяют условию, получающемуся ослаблением требования сходимости. Говорят, что последовательность S часто находится в множестве A, тогда и только тогда, когда для каждого неотрицательного целого числа m существует такое целое число n, что $n \geqslant m$ и $S_n \in A$. Это в точности то же самое, что сказать, что S ни с какого момента не находится в дополнении к множеству A. Интуитивно, последовательность часто находится в множестве A, если она никогда не перестает в него возвращаться. Точка s является предельной точкой последовательности S тогда и только тогда, когда S часто попадает в произвольную окрестность точки s. Если последовательность вещественных чисел с некоторого момента лежит в множестве, то это верно и для любой ее подпоследовательности. Следовательно, если последовательность сходится, то сходится и каждая ее подпоследовательность. Каждая предельная точка последовательности *) является пределом некоторой ее подпоследовательности.

Определения и утверждения, приведенные выше, сформулированы так, чтобы их можно было применить к любому топологическому пространству. К сожалению, однако, соответствующие теоремы в этой общности не верны. (См. задачи в конце этой главы.) Однако положение перестает казаться столь неблагоприятным после того, как мы замечаем, что лишь немногие свойства целых чисел нужны в доказательствах теорем о последовательностях вещественных чисел. Почти очевидно (хотя

*) Имеются в виду последовательности в пространстве вещественных чисел. В общих топологических пространствах (неметризуемых) это положение может нарушаться. (*Прим. перев.*)

мы и не дали никаких тому доказательств), что нам нужны только определенные свойства, связанные с наличием порядка. Строго говоря, в определение сходимости последовательностей входит не только понятие функции S на множестве неотрицательных целых чисел ω. В нем участвует еще и упорядочение $\geqslant$, заданное на множестве ω. Для удобства, работая со сходимостью, мы будем пользоваться несколько измененным определением последовательности — согласимся, что последовательность есть упорядоченная пара $(S, \geqslant)$, где S — функция на множестве положительных целых чисел; речь будет идти о сходимости пары $(S, \geqslant)$. (Окажется, что сходимость пары $(S, \leqslant)$ также имеет смысл, но совершенно другой.) Когда можно не опасаться недоразумений, символ, указывающий на упорядочение, будет опускаться, — сходимость последовательности S всегда следует понимать как сходимость пары $(S, \geqslant)$.

Удобно также иметь развернутое обозначение для последовательности (в терминах связанной переменной). В соответствии с этим, если S — функция на множестве неотрицательных целых чисел ω, будем понимать $\{S_n, n \in \omega, \geqslant\}$ как запись пары $(S, \geqslant)$.

После этого длинного введения общее определение сходимости почти самоочевидно, неясно только одно: какие свойства упорядочения $\geqslant$ нужны? Эти свойства выписаны ниже. При пользовании ими после небольших изменений остаются справедливыми обычные рассуждения, касающиеся сходимости последовательностей.

1. Замечания. Предпринятое Э. Мором изучение суммируемости неупорядоченных рядов (Э. Мор [1]) повело к построению общей теории сходимости (Мор и Смит [1]). Обобщение понятия подпоследовательности, которым мы будем пользоваться, тоже принадлежит Э. Мору [2]. Гаррет Биркгоф [3] применил теорию сходимости по Мору — Смиту к общей топологии. Форма нашего изложения теории приблизительно та же, что у Тьюки [1]. См. работу Мак Шейна [1] — обзор, который очень хорошо читается.

В задачах в конце главы коротко обсуждается другая теория сходимости и даются соответствующие ссылки.