НАПРАВЛЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И НАПРАВЛЕННОСТИ

Бинарное отношение $\geqslant$, заданное на множестве D, называется *направлением* на нем, если D не пусто, и

(а) если m, n и p — такие элементы множества D, что $m \geqslant n$ и $n \geqslant p$, то $m \geqslant p$;

(б) если $m \in D$, то $m \geqslant m$;

(в) если m и n принадлежат D, то найдется элемент p в D, для которого $p \geqslant m$ и $p \geqslant n$.

Мы говорим, что m следует за n при упорядочении $\geqslant$, или что элемент n предшествует элементу m, тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$. На обычном языке отношений (см. главу 0) условие (а) означает, что отношение $\geqslant$ транзитивно на множестве D, иначе говоря, $\geqslant$ является частичным упорядочением на D, и (б) означает, что отношение $\geqslant$ рефлексивно на D. Условие (в) носит специальный характер.

Есть несколько естественных примеров множеств, направленных отношениями. И множество вещественных чисел, и множество ω неотрицательных целых чисел направлены отношением порядка $\geqslant$. Обратите внимание на то обстоятельство, что элемент 0 следует за любым другим элементом из ω относительно порядка $\leqslant$. Стоит отметить и тот факт, что семейство всех окрестностей произвольной точки топологического пространства направлено отношением включения $\subset$ (пересечение двух окрестностей является окрестностью, которая следует за каждой из них в смысле упорядочения $\subset$). С другой стороны, семейство всех конечных подмножеств произвольного множества направлено отношением $\supset$. Любое множество превращается в направленное, если согласиться, что $x \geqslant y$ для любых двух его элементов x и y, так что каждый элемент следует как за самим собой, так и за любым другим элементом.

Направленное множество — это пара $(D, \geqslant)$, где $\geqslant$ — направление на множестве D. (Иногда называют это *направленной системой*.) *Направленностью* называется пара $(S, \geqslant)$, где S — функция и $\geqslant$ — направление на ее области определения. (Направленность тоже иногда называют направленным множеством *).) Если область определения функции S содержит D и множество D направлено отношением $\geqslant$, то $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ есть направленность $(S|D, \geqslant)$, где $S|D$ — это сужение функции S на множество D. Говорят, что направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ является направленностью *в* множестве A, тогда и только тогда, когда $S_n \in A$ для всех n; говорят, что направленность находится *в* множестве A *с некоторого момента*, тогда и только тогда, когда существует $m \in D$, для которого из $n \in D$ и $n \geqslant m$ следует, что $S_n \in A$. Направленность *часто встречается* с A в том и лишь в том случае, когда для каждого m из D найдется элемент $n \in D$ такой, что $n \geqslant m$ и $S_n \in A$. Если направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ часто встречается с множеством A, то множество E всех элементов n из D, для которых $S_n \in A$, обладает следующим свойством: для каждого m из D найдется элемент $p \in E$ такой, что $p \geqslant m$. Такие подмножества множества D называются *конфинальными*. Каждое конфинальное подмножество E множества D тоже направлено отношением $\geqslant$, ибо для любых двух элементов m и n из E найдется элемент $p \in D$ такой, что $p \geqslant m$ и $p \geqslant n$, а за ним найдется элемент q из E — он и будет искомым. Имеем следующую очевидную эквивалентность: направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ часто встречается с множеством A тогда и только тогда, когда некоторое конфинальное подмножество множества D отображается посредством S в A, а так будет в том и лишь в том случае, когда направленность не находится с некоторого момента в дополнении к A.

Направленность $\{S, \geqslant\}$ *сходится* в топологическом пространстве $(X, \mathfrak{J})$ к точке s относительно топологии $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда, когда она с некоторого момента находится в произвольной $\mathfrak{J}$-окрестности точки s. Понятие сходимости предполагает наличие функции S, топологии $\mathfrak{J}$ и упорядочения $\geqslant$. Однако в случаях, когда можно не опасаться недоразумений, мы будем опускать символ $\mathfrak{J}$, указывающий на топологию, или символ $\geqslant$, или оба эти символа и просто говорить, что «направлен-

*) В русской литературе встречается также название «последовательность по направленному множеству». (*Прим. перев.*)

ность S (направленность $\{S_n, n \in D\}$) сходится к точке s». Если X — дискретное пространство (т. е. каждое его подмножество открыто), то направленность S сходится к точке s тогда и только тогда, когда с некоторого момента S лежит в множестве $\{s\}$; это означает, что, начиная с некоторого момента, все значения направленности S совпадают с s. С другой стороны, если пространство X антидискретно (т. е. его единственными открытыми подмножествами являются все X и пустое множество), то любая направленность в X сходится к каждой точке из X. Таким образом, направленность может сходиться к многим различным точкам одновременно.

Можно легко описать в терминах сходимости понятия предельной точки, замыкания множества и топологии пространства. Рассуждения здесь отличаются лишь легкими изменениями от соответствующих рассуждений о последовательностях вещественных чисел.

2. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство. Тогда*:

(а) *Точка s является предельной точкой подмножества A пространства X в том и только в том случае, когда в $A \setminus \{s\}$ есть направленность, сходящаяся к s.*

(б) *Точка s принадлежит замыканию подмножества A пространства X в том и только в том случае, когда в A есть направленность, сходящаяся к s.*

(в) *Множество A замкнуто в X тогда и только тогда, когда никакая направленность, содержащаяся в A, не сходится ни к какой точке из $X \setminus A$.*

Доказательство. Если s — предельная точка для A, то в любой окрестности U точки s найдется точка S_U множества A, принадлежащая $U \setminus \{x\}$. Семейство $\mathfrak{U}$ всех окрестностей точки s направлено отношением включения $\subset$, и если U и V — такие окрестности точки s, что $V \subset U$, то $S_V \in V \subset U$. Поэтому направленность $\{S_U, U \in \mathfrak{U}, \subset\}$ сходится к s. С другой стороны, если направленность в $A \setminus \{s\}$ сходится к s, то в каждой окрестности точки s содержатся точки этой направленности и множество $A \setminus \{s\}$, несомненно, пересекается с любой окрестностью точки s. Этим утверждение (а) доказано. Чтобы доказать (б), напомним, что замыкание произвольного множества A состоит из всех точек A и предельных точек для A. Для каждой предельной точки множества A по предыдущему существует направленность в A, сходящаяся к ней. Для каждой точки s из A направленность, которая на любом элементе своей области определения принимает значение s, сходится к s. Следовательно, для каждой точки из замыкания множества A в A есть направленность, сходящаяся к этой точке. Обратно, если в A есть направленность, сходящаяся к s, то каждая окрестность точки s пересекает множество A. Значит, s принадлежит замыканию множества A. Предложение (в) теперь очевидно.

Мы видели, что направленность, вообще говоря, может сходиться к нескольким различным точкам одновременно. Существуют пространства, в которых предел сходящейся направленности определен однозначно: если направленность S сходится и к точке s, и к точке t, то $s=t$. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* (или *T_2-пространством*) тогда и только тогда, когда у любых двух различных точек x и y этого пространства есть непересекающиеся окрестности.

3. Теорема. *Топологическое пространство является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда никакая направленность в этом пространстве не сходится к двум различным точкам.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, s и t — две его различные точки. У них есть непересекающиеся окрестности U и V соответственно. Так как никакая направленность не может находиться с некоторого момента одновременно в двух непересекающихся множествах, то ясно, что никакая направленность в X не сходится к s и к t одновременно. Докажем обратное. Пусть X — не хаусдорфово пространство. Выберем точки s и t в X так, чтобы любая окрестность точки s пересекала любую окрестность точки t. Обозначим через $\mathfrak{U}_s$ семейство всех окрестностей точки s и через $\mathfrak{U}_t$ — семейство всех окрестностей точки t. Тогда $\mathfrak{U}_s$ и $\mathfrak{U}_t$ являются направленными множествами относительно включения $\subset$. Упорядочим декартово произведение этих множеств, согласившись считать, что $(T, U) \geqslant (V, W)$, в том и лишь в том случае, когда $T \subset V$ и $U \subset W$. Ясно, что отношение $\geqslant$ превращает рассматриваемое произведение в направленное множество. Для каждого элемента (T, U) произведения $\mathfrak{U}_s \times \mathfrak{U}_t$ пересечение $T \cap U$ не пусто. Значит, из каждого множества $T \cap U$ можно выбрать по точке $S_{(T, U)}$. Если $(V, W) \geqslant (T, U)$, то $S_{(V, W)} \in \in V \cap W \subset T \cap U$ и, следовательно, направленность $\{S_{(T, U)}, (T, U) \in \mathfrak{U}_s \times \mathfrak{U}_t, \geqslant\}$ сходится и к s, и к t.

Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — хаусдорфово пространство и направленность $\{S_n, n \in D, \geqslant\}$ сходится в X к точке s; будем писать в этом случае $\mathfrak{J}\text{-}\lim\{S_n, n \in D, \geqslant\} = s$. Когда нет оснований для путаницы, можно писать короче: $\lim\{S_n : n \in D\} = s$, или просто $\lim\limits_n S_n = s$. Употребление термина «предел» следовало бы ограничить случаем направленностей в хаусдорфовых пространствах. Тогда выполнялось бы обычное правило транзитивности отношения равенства: если $\lim\{S_n : n \in D\} = s$ и $\lim\{S_n : n \in D\} = = t$, то $s = t$, — ведь мы всегда понимаем равенство как совпадение. Все-таки иногда мы будем писать $\lim\limits_n S_n = s$, имея в виду направленность S, сходящуюся к точке s в нехаусдорфовом пространстве.

Прием, примененный нами в последнем доказательстве, часто бывает полезен. Если $(D, \geqslant)$ и $(E, \succ)$ — направленные множества, то декартово произведение $D \times E$ превращается в направленное множество отношением $\gg$, где $(d, e) \gg (f, g)$ тогда и только тогда, когда $d \geqslant f$ и $e \succ g$. Направленное множество $(D \times E, \gg)$ называется *направленным произведением* направленных множеств $(D, \geqslant)$ и $(E, \succ)$. Мы хотим определить также произведение семейства направленных множеств. Предположим, что для каждого a из некоторого множества A задано направленное множество $(D_a, >_a)$. Декартовым произведением $\Pi\{D_a : a \in A\}$ называется множество всех функций d на A таких, что $d_a (= d(a))$ принадлежит D_a для каждого a из A. Направленное произведение есть пара $\{\Pi\{D_a : a \in A\}, \geqslant\}$, где d и e — элементы произведения и $d \geqslant e$ в том и лишь в том случае, когда $d_a >_a e_a$ для каждого $a \in A$. *Произведение направлений* есть $\geqslant$. Конечно, следует проверить, что направленное произведение действительно является направленным множеством. Пусть d и e — элементы декартова произведения

$\Pi\{D_a : a \in A\}$. Для каждого $a \in A$ в D_a найдется элемент f_a, который следует и за d_a, и за e_a относительно упорядочения $>_a$. Функция f, значение которой в a равно f_a, следует и за d, и за e относительно $\geqslant$. Важен специальный случай направленного произведения: когда все координатные множества D_a совпадают и совпадают заданные на них направления $>_a$, — тогда произведение $\Pi\{D_a : a \in A\}$ есть просто множество D^A всех отображений множества A в D, направленное посредством соглашения о том, что d следует за e в том и лишь в том случае, когда $d(a)$ следует за $e(a)$ для каждого $a \in A$. В точности таково, например, обычное упорядочение множества всех вещественных функций, определенных на множестве вещественных чисел.

Следующий результат о пределах связан с аксиомой замыкания: $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Он важен потому, что позволяет заменить двойной предел простым. Ситуация такова: рассмотрим класс всех функций S, значение которых $S(m, n)$ определено для всех m из некоторого направленного множества D и всех n из некоторого направленного множества E_m. Мы хотим найти направленность R со значениями в указанной области определения функций S, для которой $S \circ R$ сходится к $\lim\limits_m \lim\limits_n S(m, n)$, — предполагается, что S является отображением в топологическое пространство и указанный двойной предел существует. Интересно отметить, что для решения этой задачи необходимо пользоваться сходимостью по Мору — Смиту, ибо, обращаясь к двойным последовательностям, мы видим, что иногда никакая последовательность, областью значений которой служит подмножество множества $\omega \times \omega$, не обладает этим свойством. Построение, позволяющее решить поставленную задачу, является вариантом диагонального процесса. Обозначим через F направленное произведение $D \times \Pi\{E_n : n \in D\}$ и для каждой точки (m, f) из F положим $R(m, f) = (m, f(m))$. Тогда R — искомая направленность.

4. Теорема о повторном пределе. *Пусть D — направленное множество, и каждому m из D соответствует некоторое направленное множество E_m. Обо-*

значим через F произведение $D \times \Pi\{E_m : m \in D\}$ и положим $R(m, f) = (m, f(m))$ для произвольного (m, f) из F. Если для каждой пары $m \in D$, $n \in E_m$ $S(m, n)$ есть элемент некоторого фиксированного топологического пространства, то направленность $S \circ R$ сходится к $\lim_m \lim_n S(m, n)$, если только этот повторный предел существует.

Доказательство. Допустим, что $\lim_m \lim_n S(m, n) = s$ и что U открытая окрестность*) точки s. Мы должны найти такой элемент (m, f) из F, что если $(p, g) \geqslant (m, f)$, то $S \circ R(p, g) \in U$. Выберем m в D так, чтобы было $\lim_n S(p, n) \in U$ для каждого p, следующего за m, и затем выберем для каждого такого p некоторый элемент $f(p) \in E_p$, удовлетворяющий условию: $S(p, n) \in U$ для всех n, следующих за $f(p)$ в E_p. Если p — элемент из D, который не следует за m, то в качестве $f(p)$ возьмем какой угодно элемент множества E_p. Если $(p, g) \geqslant (m, f)$, то $p \geqslant m$. Значит, $\lim_n S(p, n) \in U$ и (так как $g(p) \geqslant f(p)$) $S \circ R(p, g) = S(p, g(p)) \in U$.

ПОДНАПРАВЛЕННОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

В соответствии со сказанным во введении к этой главе, мы дадим теперь обобщение понятия подпоследовательности и докажем обещанные теоремы.

Направленность $\{T_m, m \in D\}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{S_n, n \in E\}$ тогда и только тогда, когда существует такая функция N на D со значениями в E, что:

(a) $T = S \circ N$ или, что эквивалентно, $T_i = S_{N_i}$ для каждого $i \in D$;

---

*) Существование у точки s открытой окрестности важно для доказательства. Теорема о повторном пределе, тот факт, что семейство открытых окрестностей точки образует базу в этой точке, и аксиома замыкания ($\overline{\overline{A}} = \overline{A}$) тесно связаны. Сходимость исследовалась и в пространствах со структурой, менее ограничительной, чем топология. См. Рибейро [1].