значим через F произведение $D \times \Pi\{E_m : m \in D\}$ и положим $R(m, f) = (m, f(m))$ для произвольного (m, f) из F. Если для каждой пары $m \in D$, $n \in E_m$ $S(m, n)$ есть элемент некоторого фиксированного топологического пространства, то направленность $S \circ R$ сходится к $\lim_m \lim_n S(m, n)$, *если только этот повторный предел существует.*

Доказательство. Допустим, что $\lim_m \lim_n S(m, n) = s$ и что U открытая окрестность*) точки s. Мы должны найти такой элемент (m, f) из F, что если $(p, g) \geqslant (m, f)$, то $S \circ R(p, g) \in U$. Выберем m в D так, чтобы было $\lim_n S(p, n) \in U$ для каждого p, следующего за m, и затем выберем для каждого такого p некоторый элемент $f(p) \in E_p$, удовлетворяющий условию: $S(p, n) \in U$ для всех n, следующих за $f(p)$ в E_p. Если p — элемент из D, который не следует за m, то в качестве $f(p)$ возьмем какой угодно элемент множества E_p. Если $(p, g) \geqslant (m, f)$, то $p \geqslant m$. Значит, $\lim_n S(p, n) \in U$ и (так как $g(p) \geqslant f(p)$) $S \circ R(p, g) = S(p, g(p)) \in U$.

ПОДНАПРАВЛЕННОСТИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ

В соответствии со сказанным во введении к этой главе, мы дадим теперь обобщение понятия подпоследовательности и докажем обещанные теоремы.

Направленность $\{T_m, m \in D\}$ называется *поднаправленностью* направленности $\{S_n, n \in E\}$ тогда и только тогда, когда существует такая функция N на D со значениями в E, что:

(a) $T = S \circ N$ или, что эквивалентно, $T_i = S_{N_i}$ для каждого $i \in D$;

---

*) Существование у точки s открытой окрестности важно для доказательства. Теорема о повторном пределе, тот факт, что семейство открытых окрестностей точки образует базу в этой точке, и аксиома замыкания ($\bar{\bar{A}} = \bar{A}$) тесно связаны. Сходимость исследовалась и в пространствах со структурой, менее ограничительной, чем топология. См. Рибейро [1].

(б) для каждого $m \in E$ найдется элемент $n \in D$ такой, что если $p \geqslant n$, то $N_p \geqslant m$.

Так как недоразумений, по-видимому, возникнуть не может, то мы опустили символ, указывающий на упорядочение. Второе условие интуитивно состоит в том, что «если p велико, то и N_p велико». Отсюда сразу ясно, что если направленность S с некоторого момента находится в множестве A, то и ее поднаправленность $S \circ N$ тоже с некоторого момента находится в A. Это очень важное обстоятельство; именно с ним мы согласовали определение поднаправленности. Обратите внимание на то обстоятельство, что каждое конфинальное подмножество E множества D само направлено заданным упорядочением и что $\{S_n : n \in E\}$ является поднаправленностью направленности S. (Пусть N — тождественное отображение на E; тогда условие (б) превращается в требование конфинальности множества E направленному множеству D.) Это — стандартный способ построения поднаправленностей; можно только огорчаться, что этот простой тип поднаправленностей годится не для всех целей (2.Д).

Есть специальная разновидность поднаправленностей, которой достаточно почти для всего. Предположим, что N — изотонная функция на направленном множестве E со значениями в направленном множестве D (т. е. $N_i \geqslant N_j$ при $i \geqslant j$), область значений которой конфинальна D. Тогда, очевидно, $S \circ N$ является поднаправленностью любой направленности S. Поднаправленность, которая строится в доказательстве следующей леммы, как раз относится к этому роду (это замечено Смитом).

5. Лемма. *Пусть S — какая-либо направленность и $\mathfrak{A}$ — семейство множеств, с каждым из которых S часто встречается, и такое, что пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{A}$ содержит некоторый элемент $\mathfrak{A}$. Тогда существует поднаправленность направленности S, которая попадает в каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$, начиная с некоторого момента.*

Доказательство. Пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{A}$ содержит некоторый элемент этого семейства; значит, $\mathfrak{A}$ направлено отношением $\subset$. Пусть

$\{S_n, n \in D\}$ — направленность, которая часто встречается с каждым элементом семейства $\mathfrak{A}$, и E — множество всех пар (m, A) таких, что $m \in D$, $A \in \mathfrak{A}$ и $S_m \in A$. Тогда E направлено произведением направлений на $D \times \mathfrak{A}$. В самом деле, для любых двух элементов (m, A) и (n, B) из E существует такой элемент C в семействе $\mathfrak{A}$, что $C \subset A \cap B$, и элемент $p \in D$, следующий и за m, и за n и такой, что $S_p \in C$. Тогда $(p, C) \in E$, причем элемент (p, C) следует как за (m, A), так и за (n, B). Для произвольного (m, A) положим $N(m, A) = m$. Отображение N, очевидно, изотонное, а область его значений конфинальна D (ибо направленность $\{S_n, n \in D\}$ часто встречается с каждым элементом семейства $\mathfrak{A}$). Следовательно, $S \circ N$ — поднаправленность направленности S. Наконец, если A — элемент семейства $\mathfrak{A}$, m — произвольный элемент из D, для которого $S_m \in A$, и (n, B) — элемент направленного множества E, следующий за (m, A), то $S \circ N(n, B) = S_n \in B \subset A$. Значит, направленность $S \circ N$, начиная с некоторого момента, находится в множестве A.

Применим теперь эту лемму для исследования сходимости в топологическом пространстве. Точка s пространства называется предельной точкой направленности S тогда и только тогда, когда S часто встречается с каждой окрестностью точки s. У направленности может быть одна предельная точка, может быть много таких точек и может не быть ни одной. Например, если ω — множество неотрицательных целых чисел, то $\{n, n \in \omega\}$ — направленность, у которой нет предельной точки в обычной топологии вещественных чисел. Другую крайность представляет случай, когда S — последовательность, областью значений которой является все множество рациональных чисел (такая последовательность существует, так как множество рациональных чисел счетно). Легко видеть, что эта последовательность часто встречается с каждым открытым интервалом; следовательно, любое вещественное число является ее предельной точкой. Если направленность сходится к некоторой точке, то, конечно, эта точка является ее предельной точкой. Но может оказаться, что у последовательности есть только одна предельная точка, к которой она тем не менее не сходится.

Рассмотрим, например, последовательность —1, 1, —1, 2, —1, 3, —1, ..., получающуюся при чередовании —1 с натуральными числами. Тогда —1 — единственная предельная точка этой последовательности, хотя последняя к —1 не сходится.

6. Теорема. *Точка s топологического пространства является предельной точкой направленности S в том и только в том случае, когда некоторая поднаправленность последней сходится к s.*

Доказательство. Пусть s — предельная точка направленности S и $\mathfrak{U}$ — семейство всех окрестностей точки s. Тогда пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{U}$ снова является элементом $\mathfrak{U}$ и S часто встречается с каждым элементом семейства $\mathfrak{U}$. Следовательно, мы можем применить предыдущую лемму, получается поднаправленность S, которая, начиная с некоторого момента, лежит в произвольном элементе семейства $\mathfrak{U}$, т. е. сходится к s. Если s не является предельной точкой направленности S, то у точки s найдется окрестность U, с которой S не встречается часто, а это означает, что S начиная с некоторого момента находится в дополнении к окрестности U. Тогда и каждая поднаправленность направленности S начиная с некоторого момента лежит в дополнении к U и, таким образом, не может сходиться к s.

Следующее утверждение характеризует предельные точки в терминах замыканий.

7. Теорема. *Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — направленность в топологическом пространстве. Для каждого $n \in D$ обозначим через A_n множество всех точек S_m, для которых $m > n$. Тогда точка s является предельной для направленности $\{S_n, n \in D\}$ в том и только в том случае, когда s принадлежит замыканию множества A_n при каждом $n \in D$.*

Доказательство. Пусть s — предельная точка направленности $\{S_n, n \in D\}$. Тогда, каково бы ни было n, множество A_n пересекает любую окрестность точки s, ибо направленность $\{S_n, n \in D\}$ часто встречается с каждой из них. Следовательно, s принадлежит замыканию каждого из множеств A_n. Если s не является предельной точкой для $\{S_n, n \in D\}$, то у s найдется окрестность U, с которой направленность $\{S_n, n \in D\}$ не встречается часто. Значит, для некоторого $n \in D$ из $m \geqslant n$ следует, что $S_m \notin U$, т. е. множества U и A_n не пересекаются. Следовательно, точка s не входит в замыкание множества A_n.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Есть определенный интерес в том, чтобы знать, когда топология может быть описана исключительно в терминах сходимости последовательностей, — не только потому, что удобно иметь некоторую фиксированную область для произвольных направленностей, но еще и потому, что не все свойства последовательностей удается обобщить

Наиболее важный класс топологических пространств, описываемых в терминах сходимости последовательностей, образуют пространства с первой аксиомой счетности — топологические пространства, у которых в каждой точке есть счетная база. Последнее условие означает, что у каждой точки x пространства X существует такое счетное семейство окрестностей, что каждая окрестность точки x содержит некоторую окрестность из этого семейства. Если ограничиться такими пространствами, то почти во всех предшествующих теоремах слово «направленность» можно заменить на слово «последовательность».

Следует отметить, что последовательность может обладать поднаправленностями, не являющимися подпоследовательностями.

8. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда*:

(а) *Точка s является предельной для множества A в том и только в том случае, когда существует последовательность в $A \setminus \{s\}$, сходящаяся к s.*

(б) *Множество A открыто в том и только в том случае, когда каждая последовательность, которая сходится к некоторой точке из A, находится в A начиная с некоторого момента,*