с которой направленность $\{S_n, n \in D\}$ не встречается часто. Значит, для некоторого $n \in D$ из $m \geqslant n$ следует, что $S_m \notin U$, т. е. множества U и A_n не пересекаются. Следовательно, точка s не входит в замыкание множества A_n.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Есть определенный интерес в том, чтобы знать, когда топология может быть описана исключительно в терминах сходимости последовательностей, — не только потому, что удобно иметь некоторую фиксированную область для произвольных направленностей, но еще и потому, что не все свойства последовательностей удается обобщить

Наиболее важный класс топологических пространств, описываемых в терминах сходимости последовательностей, образуют пространства с первой аксиомой счетности — топологические пространства, у которых в каждой точке есть счетная база. Последнее условие означает, что у каждой точки x пространства X существует такое счетное семейство окрестностей, что каждая окрестность точки x содержит некоторую окрестность из этого семейства. Если ограничиться такими пространствами, то почти во всех предшествующих теоремах слово «направленность» можно заменить на слово «последовательность».

Следует отметить, что последовательность может обладать поднаправленностями, не являющимися подпоследовательностями.

8. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда*:

(а) *Точка s является предельной для множества A в том и только в том случае, когда существует последовательность в $A \setminus \{s\}$, сходящаяся к s.*

(б) *Множество A открыто в том и только в том случае, когда каждая последовательность, которая сходится к некоторой точке из A, находится в A начиная с некоторого момента,* (в) *Если точка s является предельной точкой некоторой последовательности S, то в S есть подпоследовательность, сходящаяся к s.*

Доказательство. Предположим, что s — предельная точка подмножества A пространства X, и пусть $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная база системы окрестностей в точке s. Положим $V_n = \bigcap\{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Тогда последовательность $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ тоже образует базу системы окрестностей в точке s и, кроме того, удовлетворяет условию $V_{n+1} \subset V_n$ при каждом n. Выберем для каждого n некоторую точку S_n из множества $V_n \cap \cap (A \setminus \{s\})$. Полученная таким образом последовательность $\{S_n, n \in \omega\}$, очевидно, сходится к s. Этим доказана половина утверждения (а). Обратная половина его очевидна. Если A — неоткрытое подмножество пространства X, то в $X \setminus A$ найдется последовательность, сходящаяся к некоторой точке из A. Такая последовательность, разумеется, ни с какого момента не лежит в A, откуда следует утверждение (б). Предположим, наконец, что точка s является предельной точкой последовательности S и что $V_0, V_1, \ldots$ — база в s, для которой $V_{n+1} \subset V_n$ при любом n. Для каждого неотрицательного целого i выберем N_i так, чтобы было $N_i \geqslant i$ и чтобы элемент S_{N_i} принадлежал множеству V_i. Тогда непременно $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ — подпоследовательность последовательности S, сходящаяся к s.

КЛАССЫ СХОДИМОСТИ

Иногда бывает удобно задавать топологию, указывая, какие направленности к каким точкам сходятся. Например, если $\mathfrak{F}$ — семейство функций, определенных на множестве X со значениями в топологическом пространстве Y, то естественно сказать, что направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к функции g, тогда и только тогда, когда $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом $x \in X$. (Этот тип сходимости более подробно обсуждается в главе 7.) Согласившись с таким определением, мы, естественно, приходим к вопросу: существует ли такая топология на множестве $\mathfrak{F}$, что определенная нами сходимость является сходимостью относительно этой тополо-