(в) *Если точка s является предельной точкой некоторой последовательности S, то в S есть подпоследовательность, сходящаяся к s.*

Доказательство. Предположим, что s — предельная точка подмножества A пространства X, и пусть $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ — счетная база системы окрестностей в точке s. Положим $V_n = \bigcap\{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Тогда последовательность $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ тоже образует базу системы окрестностей в точке s и, кроме того, удовлетворяет условию $V_{n+1} \subset V_n$ при каждом n. Выберем для каждого n некоторую точку S_n из множества $V_n \cap \cap (A \setminus \{s\})$. Полученная таким образом последовательность $\{S_n, n \in \omega\}$, очевидно, сходится к s. Этим доказана половина утверждения (а). Обратная половина его очевидна. Если A — неоткрытое подмножество пространства X, то в $X \setminus A$ найдется последовательность, сходящаяся к некоторой точке из A. Такая последовательность, разумеется, ни с какого момента не лежит в A, откуда следует утверждение (б). Предположим, наконец, что точка s является предельной точкой последовательности S и что $V_0, V_1, \ldots$ — база в s, для которой $V_{n+1} \subset V_n$ при любом n. Для каждого неотрицательного целого i выберем N_i так, чтобы было $N_i \geqslant i$ и чтобы элемент S_{N_i} принадлежал множеству V_i. Тогда непременно $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ — подпоследовательность последовательности S, сходящаяся к s.

КЛАССЫ СХОДИМОСТИ

Иногда бывает удобно задавать топологию, указывая, какие направленности к каким точкам сходятся. Например, если $\mathfrak{F}$ — семейство функций, определенных на множестве X со значениями в топологическом пространстве Y, то естественно сказать, что направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к функции g, тогда и только тогда, когда $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом $x \in X$. (Этот тип сходимости более подробно обсуждается в главе 7.) Согласившись с таким определением, мы, естественно, приходим к вопросу: существует ли такая топология на множестве $\mathfrak{F}$, что определенная нами сходимость является сходимостью относительно этой топологии? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам применить технику топологических пространств при исследовании строения семейства $\mathfrak{F}$.

Формально задача состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторый класс, образованный парами (S, s), где S — направленность в X и s — точка. В каких случаях существует топология $\mathfrak{J}$ на X такая, что $(S, s) \in \mathfrak{C}$ тогда и только тогда, когда направленность S сходится к точке s относительно топологии $\mathfrak{J}$? Из предыдущего обсуждения вопросов сходимости мы знаем, что семейство $\mathfrak{C}$ должно обладать рядом определенных свойств, если такая топология существует. Мы назовем семейство $\mathfrak{C}$ *классом сходимости* на X в том и лишь в том случае, когда оно удовлетворяет выписанным ниже условиям *). Для удобства мы говорим, что S сходится $(\mathfrak{C})$ к точке s, или что $\lim\limits_n S_n \equiv s\,(\mathfrak{C})$, тогда и только тогда, когда $(S, s) \in \mathfrak{C}$.

(а) *Если S — такая направленность, что $S_n = s$ при каждом n, то S сходится $(\mathfrak{C})$ к s.*

(в) *Если направленность S не сходится $(\mathfrak{C})$ к точке s, то и любая ее поднаправленность сходится к s.*

(в) *Если направленность S не сходится $(\mathfrak{C})$ к точке s, то существует ее поднаправленность, никакая поднаправленность которой не сходится $(\mathfrak{C})$ к s.*

(г) (*Теорема 2.4 о повторных пределах.*) *Пусть D — направленное множество и для каждого $m \in D$ задано некоторое направленное множество E_m. Обозначим через F произведение $D \times \Pi\{E_m : m \in D\}$ и положим $R(m, f) = (m, f(m))$ для произвольного $(m, f) \in F$. Если $\lim\limits_m \lim\limits_n S(m, n) \equiv s\,(\mathfrak{C})$, то $S \circ R$ сходится $(\mathfrak{C})$ к s.*

Ранее было доказано, что сходимость в топологическом пространстве удовлетворяет условиям (а), (б) и (г). Легко доказать, что и (в) в этом случае выполняется: если направленность $\{S_n, n \in D\}$ не сходится к

*) Первые три из этих условий, с заменой слова «направленность» словом «последовательность», представляют собой принадлежащие Куратовскому модификации аксиом Фреше, характеризующих пространства, называемые именем последнего. См. Куратовский [1].

точке s, то она часто встречается с дополнением к произвольной ее окрестности. Следовательно, для некоторого конфинального подмножества E множества D направленность $\{S_n, n \in E\}$ лежит в дополнении. Ясно, что $\{S_n, n \in E\}$ является поднаправленностью, никакая поднаправленность которой не сходится к s.

Покажем теперь, что каждый класс сходимости на самом деле возникает на основе некоторой топологии.

9. Теорема. *Пусть $\mathfrak{C}$ — класс сходимости на множестве X. Для каждого подмножества A множества X обозначим через A^c множество всех точек $s \in X$, для каждой из которых в A существует направленность S, сходящаяся ($\mathfrak{C}$) к s. Тогда ^{c} — оператор замыкания, и $(S, s) \in \mathfrak{C}$ в том и только в том случае, когда направленность S сходится к точке s относительно топологии, ассоциированной с оператором ^{c}.*

Доказательство. Надо показать, прежде всего, что ^{c} — оператор замыкания (см. 1.8). Так как направленность является функцией на направленном множестве, которое по определению не пусто, то множество $(\Lambda)^c$ пусто. Ввиду ограничения (а) на постоянные направленности, для каждой точки s произвольного множества A, в A существует направленность, сходящаяся ($\mathfrak{C}$) к s. Следовательно, $A \subset A^c$. Если $s \in A^c$, то в силу определения оператора ^{c} имеем $s \in (A \cup B)^c$ и, значит, $A^c \subset \subset (A \cup B)^c$ для каждого множества B. Поэтому $A^c \cup B^c \subset \subset (A \cup B)^c$. Докажем противоположное включение. Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — направленность в множестве $A \cup B$, сходящаяся ($\mathfrak{C}$) к точке s. Положим $D_A = \{n : n \in D \text{ и } S_n \in A\}$ и $D_B = \{n : n \in D \text{ и } S_n \in B\}$. Тогда $D_A \cap D_B = D$. Значит, либо множество D_A, либо множество D_B конфинально множеству D и, следовательно, либо $\{S_n, n \in D_A\}$, либо $\{S_n, n \in D_B\}$ образует поднаправленность направленности $\{S_n, n \in D\}$, тоже сходящуюся в силу условия (б) к точке s. Следовательно, $s \in A^c \cup B^c$. Этим доказано, что $A^c \cup B^c = (A \cup B)^c$. Теперь следует показать, что $A^{cc} = A^c$. Условие (г) — как раз то, что нужно для этого. Пусть $\{T_m, m \in D\}$ — направленность в множестве A^c, сходящаяся ($\mathfrak{C}$) к точке t. Для каждого $m \in D$ найдутся направленное множество E_m и направленность $\{S(m, n), n \in E_m\}$, сходящаяся ($\mathfrak{C}$) к точке T_m. Условие (г) позволяет заключить, что в множестве A существует направленность, которая сходится ($\mathfrak{C}$) к t; следовательно, $t \in A^c$. Значит, $A^{cc} = A^c$.

Осталась наиболее тонкая часть доказательства — надо показать, что сходимость ($\mathfrak{C}$) совпадает со сходимостью относительно топологии $\mathfrak{J}$, ассоциированной с оператором ^{c}. Предположим сначала, что направленность $\{S_n, n \in D\}$ сходится ($\mathfrak{C}$) к точке s и не сходится к s по топологии $\mathfrak{J}$. Тогда существует открытая окрестность U точки s такая, что $\{S_n, n \in D\}$ ни с какого момента не находится в U. Тогда для некоторого конфинального подмножества E множества D будет $S_n \in X \setminus U$ при всех n из E. Так как $\{S_n, n \in E\}$ является поднаправленностью направленности $\{S_n, n \in D\}$, то $\{S_n, n \in E\}$ сходится ($\mathfrak{C}$) к s в силу условия (б). Значит, $X \setminus U \neq \neq (X \setminus U)^c$ и множество U не открыто относительно $\mathfrak{J}$, что приводит к противоречию.

Наконец, предположим, что направленность P сходится к точке r относительно топологии $\mathfrak{J}$ и не сходится к ней ($\mathfrak{C}$). Тогда в силу условия (в) найдется поднаправленность $\{T_m, m \in D\}$ в P, никакая поднаправленность которой не сходится ($\mathfrak{C}$) к r. Противоречие будет получено, если мы все же найдем в $\{T_m, m \in D\}$ поднаправленность, сходящуюся ($\mathfrak{C}$) к r. Для каждого m из D положим $B_m = \{n : n \in D \text{ и } n \geqslant m\}$ и через A_m обозначим множество всех точек T_n, для которых $n \in B_m$. Так как направленность $\{T_m, m \in D\}$ сходится относительно $\mathfrak{J}$ к r, то элемент r должен принадлежать замыканию каждого из множеств A_m. Следовательно, для каждого m из D найдутся такие направленное множество E_m и направленность $\{U(m, n), n \in E_m\}$ в B_m, что композиция $\{T \circ U(m, n), n \in E_m\}$ сходится ($\mathfrak{C}$) к r. Теперь применимо условие (г) из определения класса сходимости. Положим $R(m, f) = (m, f(m))$ для каждого (m, f) из $D \times \Pi\{E_m, m \in D\}$. Направленность $T \circ U \circ R$ сходится ($\mathfrak{C}$) к точке r. Далее, если $p \geqslant m$, то $U \circ R(p, f) = U(p, f(p)) \in B_m$. Это означает, что $U \circ R(p, f) \geqslant m$. Отсюда вытекает, что $T \circ U \circ R$ является поднаправленностью направленности T, и теорема доказана.

Предшествующей теоремой установлено взаимно однозначное соответствие между всеми топологиями на множестве X и всеми классами сходимости на X. Это соответствие обращает порядок в следующем смысле. Если $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ — два класса сходимости и $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — ассоциированные с ними топологии, то $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{J}_1$. (Этот факт непосредственно вытекает из определения сходимости.) Заметим также, что пересечение $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$ — снова некоторый класс сходимости в силу четырех характеристических свойств класса сходимости. Легко видеть, что топология, ассоциированная с $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$, есть наименьшая топология из тех, которые одновременно больше $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$, и (двойственное утверждение) класс сходимости, порождаемый топологией $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$, является наименьшим среди всех классов сходимости, бо́льших $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ одновременно.

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на последовательности

Пусть X — счетное множество с топологией, которая состоит из пустого множества и дополнений к всевозможным конечным множествам. Какие последовательности к каким точкам сходятся?

Б. Пример: последовательности не адекватны топологии

Обозначим через Ω' множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного числа Ω, вместе с ним. Наделим Ω' порядковой топологией. Тогда Ω является предельной точкой для множества $\Omega' \setminus \{\Omega\}$, но никакая последовательность из $\Omega' \setminus \{\Omega\}$ не сходится к Ω.

В. Упражнение на хаусдорфовы пространства: дверные пространства

Топологическое пространство называется *дверным* *) тогда и только тогда, когда каждое его подмножество либо открыто, либо замкнуто. В хаусдорфовом дверном пространстве не может существовать более одной предельной точки, и если x — не предельная точка, то множество $\{x\}$ открыто. (Если U — любая окрестность предельной точки y, то $U \setminus \{y\}$ — открытое множество.)

Г. Упражнение на подпоследовательности

Пусть N — какая-нибудь последовательность неотрицательных целых чисел, в которой каждое число встречается не более конечного числа раз, т. е. множество $\{i : N_i = m\}$ при любом целом m конечно (быть может, пусто). Тогда, для любой последовательности $\{S_n, n \in \omega\}$, $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ будет ее подпоследовательностью. Если

*) Так как эти пространства далее почти не встречаются, то мы сохраняем неудачное название, данное автором. (*Прим. перев.*)