множестве X и всеми классами сходимости на X. Это соответствие обращает порядок в следующем смысле. Если $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ — два класса сходимости и $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ — ассоциированные с ними топологии, то $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2$ в том и только в том случае, когда $\mathfrak{J}_2 \subset \mathfrak{J}_1$. (Этот факт непосредственно вытекает из определения сходимости.) Заметим также, что пересечение $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$ — снова некоторый класс сходимости в силу четырех характеристических свойств класса сходимости. Легко видеть, что топология, ассоциированная с $\mathfrak{C}_1 \cap \mathfrak{C}_2$, есть наименьшая топология из тех, которые одновременно больше $\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$, и (двойственное утверждение) класс сходимости, порождаемый топологией $\mathfrak{J}_1 \cap \mathfrak{J}_2$, является наименьшим среди всех классов сходимости, бо́льших $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ одновременно.

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на последовательности

Пусть X — счетное множество с топологией, которая состоит из пустого множества и дополнений к всевозможным конечным множествам. Какие последовательности к каким точкам сходятся?

Б. Пример: последовательности не адекватны топологии

Обозначим через Ω' множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного числа Ω, вместе с ним. Наделим Ω' порядковой топологией. Тогда Ω является предельной точкой для множества $\Omega' \setminus \{\Omega\}$, но никакая последовательность из $\Omega' \setminus \{\Omega\}$ не сходится к Ω.

В. Упражнение на хаусдорфовы пространства: дверные пространства

Топологическое пространство называется *дверным* *) тогда и только тогда, когда каждое его подмножество либо открыто, либо замкнуто. В хаусдорфовом дверном пространстве не может существовать более одной предельной точки, и если x — не предельная точка, то множество $\{x\}$ открыто. (Если U — любая окрестность предельной точки y, то $U \setminus \{y\}$ — открытое множество.)

Г. Упражнение на подпоследовательности

Пусть N — какая-нибудь последовательность неотрицательных целых чисел, в которой каждое число встречается не более конечного числа раз, т. е. множество $\{i : N_i = m\}$ при любом целом m конечно (быть может, пусто). Тогда, для любой последовательности $\{S_n, n \in \omega\}$, $\{S_{N_i}, i \in \omega\}$ будет ее подпоследовательностью. Если

*) Так как эти пространства далее почти не встречаются, то мы сохраняем неудачное название, данное автором. (*Прим. перев.*)

$\{S_n,\ n \in \omega\}$ — последовательность точек топологического пространства и N — произвольная последовательность неотрицательных целых чисел, то либо $\{S_{N_i},\ i \in \omega\}$ будет подпоследовательностью последовательности $\{S_n,\ n \in \omega\}$, либо у последовательности $\{S_{N_i},\ i \in \omega\}$ есть предельная точка.

Д. Пример: конфинальные подмножества не адекватны

Пусть X — множество всех пар неотрицательных целых чисел со следующей топологией: для любой точки (m, n), отличной от точки $(0, 0)$, множество $\{(m, n)\}$ открыто. Множество U является окрестностью точки $(0, 0)$ тогда и только тогда, когда для всех чисел m, за исключением конечного числа, множество $\{n : (m, n) \notin U\}$ конечно. (Представляя множество X лежащим на евклидовой плоскости, можно сказать, что произвольная окрестность точки $(0, 0)$ содержит все (кроме конечного числа) элементы произвольного столбца, за исключением некоторого конечного числа столбцов.)

(а) X — хаусдорфово пространство.

(б) Каждая точка пространства X является пересечением счетного семейства ее замкнутых окрестностей.

(в) Построенное пространство линделёфово, т. е. из каждого его открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие.

(г) Никакая последовательность точек множества $X \setminus \{(0, 0)\}$ не сходится к точке $(0, 0)$. (Если бы некоторая последовательность S, лежащая в $X \setminus \{(0, 0)\}$, сходилась к $(0, 0)$, то, начиная с некоторого момента, она находилась бы в дополнении к произвольному столбцу, т. е. число ее членов, лежащих в любом фиксированном столбце, было бы конечно *).)

(д) В $X \setminus \{(0, 0)\}$ существует последовательность S, для которой точка $(0, 0)$ является предельной точкой и такая, что никакое сужение последовательности S на конфинальное подмножество множества целых чисел не сходится.

З а м е ч а н и е. Этот пример принадлежит А р е н с у [1].

Е. Монотонные направленности

Пусть X — цепь с полным порядком, т. е. X — множество, линейно упорядоченное отношением $>$, такое, что у каждого непустого ограниченного сверху подмножества множества X есть наименьшая верхняя грань. Будем считать, что X наделено порядковой топологией (см. 1. И). Говорят, что направленность $(S, \succ)$ монотонно возрастает (убывает) в X, тогда и только тогда, когда из $m \succ n$ следует, что $S_m \geqslant S_n$ ($S_n \geqslant S_m$).

(а) Каждая монотонно возрастающая направленность в X, область значений которой ограничена (существует элемент $x \in X$ такой, что $x \geqslant S_n$ при всех n), сходится к наименьшей верхней грани своей области значений.

---

*) А тогда дополнение к множеству точек этой последовательности было бы окрестностью точки $(0, 0)$. (*Прим. перев.*)

(б) Пусть X — множество всех вещественных чисел с обычным порядком или множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа. Тогда каждая монотонно возрастающая (убывающая) направленность, область значений которой ограничена сверху (снизу), сходится к наименьшей верхней грани (наибольшей нижней грани) своей области значений.

Ж. Теория интегрирования (начальная ступень)

Пусть f — вещественная функция, A — некоторое подмножество ее области определения и $\mathfrak{A}$ — семейство всех конечных подмножеств множества A. Для каждого элемента F семейства $\mathfrak{A}$ положим $S_F = \sum \{f(a) : a \in F\}$. Множество $\mathfrak{A}$ направлено отношением $\supset$, и $\{S_F, F \in \mathfrak{A}, \supset\}$ — направленность. Если она сходится, то говорят, что функция f *суммируема* на A, а число, к которому сходится эта направленность, называют *неупорядоченной* суммой функции f по A. Обозначается последняя через $\sum \{f(a) : a \in A\}$, или просто через $\sum_A f$.

(а) Если функция f неотрицательна (неположительна), то f суммируема в том и лишь в том случае, когда суммы по всевозможным конечным подмножествам множества A ограничены сверху (ограничены снизу). (Примените предыдущую задачу о монотонных направленностях.)

(б) Положим $A_+ = \{a : f(a) \geqslant 0\}$ и $A_- = \{a : f(a) < 0\}$. Функция f суммируема на A тогда и только тогда, когда она суммируема и на A_+, и на A_-. Если f суммируема на A, то $\sum_A f = \sum_{A_+} f + \sum_{A_-} f$.

(в) Функция f суммируема на A в том и только в том случае, когда на A суммируема функция $|f|$, где $|f|(a) = |f(a)|$.

(г) Если функция f суммируема на множестве A, то множество тех точек из A, на которых она отлична от нуля, счетно. (Если бы это было не так, то для некоторого целого $n > 0$ множество $\left\{a : f(a) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$ было бы несчетно *).)

(д) Если функции f и g суммируемы на множестве A, а r и s — какие угодно вещественные числа, то функция $rf + sg$ тоже суммируема на A, и $\sum_A (rf + sg) = r \sum_A f + s \sum_A g$.

(е) Пусть функция f суммируема на множестве A, и B, C — непересекающиеся подмножества множества A. Тогда f суммируема и на B, и на C, и $\sum_{B \cup C} f = \sum_B f + \sum_C f$.

(ж) *Упорядоченной суммой* последовательности x вещественных чисел (суммой ряда) называется предел последовательности $\{S_n\}$, где $S_n = \sum \{x_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Иными словами, упорядо-

---

*) Здесь есть небольшая неточность: такого несчетного множества может не существовать, но тогда непременно найдется несчетное множество вида $\left\{a : f(a) \leqslant -\frac{1}{n}\right\}$. (*Прим. перев*).

ченная сумма есть предел направленности $\{S_F, F \in \mathfrak{B}\}$, где $\mathfrak{B}$ — семейство всех множеств вида $\{m : m \leqslant n\}$ для некоторого n. Это — поднаправленность той направленности, с помощью которой определялась неупорядоченная сумма. Последовательность x называется *абсолютно суммируемой* в том и лишь в том случае, когда последовательность $|x|$, где $|x|_n = |x_n|$, обладает упорядоченной суммой. Неупорядоченная сумма функции x на множестве целых чисел существует тогда и только тогда, когда последовательность x абсолютно суммируема. В этом случае упорядоченная и неупорядоченная суммы равны.

(з) (*Фубини*). Пусть f — вещественная функция на декартовом произведении $A \times B$. Тогда:

1) Если функция f суммируема на $A \times B$, то $\sum_{A \times B} f = \sum \left\{ \sum \{f(a, b) : b \in B\} : a \in A \right\}$. (Справа стоит одна из двух мыслимых повторных сумм.)

2) Если при каждом фиксированном a из A $f(a, b)$ либо неотрицательно при всех b, либо неположительно при всех b, и если функция $F(a) = \sum \{f(a, b) : b \in B\}$ определена для всех $a \in A$ и суммируема на A, то функция f суммируема на $A \times B$.

3) Вообще говоря, обе повторные суммы могут существовать, а функция f при этом может не быть суммируемой. В действительности, если A и B — бесконечные счетные множества, а F и G — произвольные вещественные функции, определенные на A и B соответственно, то найдется функция f на $A \times B$ такая, что $\sum \{f(a, b) : a \in A\} = G(b)$ и $\sum \{f(a, b) : b \in B\} = F(a)$ для всех b из B и всех a из A.

Замечания. Результаты, сформулированные в последней серии задач (з), нужны при построении теории меры на основе неупорядоченного суммирования, которое позволяет избежать обращения к абсолютно сходящимся рядам. У всех результатов, за исключением утверждений (г), (ж) и (з), 2), имеются гораздо более общие аналоги. В главе 7 мы снова вернемся к этим вопросам, пользуясь понятием полноты. Теоретико-множественный подход, развитый выше, проливает свет на суть более сложных примеров, связанных с интегрированием.

Исторически понятие неупорядоченной сходимости предшествовало понятию сходимости по Мору — Смиту (Мор [1]).

З. Теория интегрирования (дальнейшее развитие)

Пусть f — ограниченная вещественная функция, определенная на замкнутом интервале *) $[a, b]$ вещественных чисел. *Подразделением* S отрезка $[a, b]$ называется любое конечное семейство отрезков, покрывающее $[a, b]$, никакие два из которых не имеют больше одной общей точки. Длина интервала I будет обозначаться через $|I|$. *Мелкостью* $\|S\|$ подразделения S называется наибольшая из длин

---

*) Мы будем иногда называть замкнутый интервал отрезком. (*Прим. перев.*)

интервалов подразделения S. На семействе всех подразделений мы определим два различных направления:

1) $S \geqslant S'$ тогда и только тогда, когда S вписано в S' в том смысле, что каждый элемент из S содержится в качестве подмножества в некотором элементе разбиения S';

2) $S \gg S'$ тогда и только тогда, когда $\|S\| \leqslant \|S'\|$.

Пусть $M_f(I)$ — наименьшая верхняя грань функции f на отрезке I и $m_f(I)$ — ее наибольшая нижняя грань. *Верхняя и нижняя суммы Дарбу*, отвечающие подразделению S, определяются как $D_f(S) = \sum\{|I| M_f(I) : I \in S\}$ и $d_f(S) = \sum\{|I| m_f(I) : I \in S\}$ соответственно. Римановы суммы несколько сложнее. *Функция выбора* для подразделения S — это любая такая функция c на S, что $c(I) \in I$ для каждого I из S. Множество всех пар (S, c), где S — подразделение, а c — функция выбора для S, можно упорядочить двумя способами: $(S, c) \succ (S', c')$ эквивалентно $S \geqslant S'$, и $(S, c) \succ\succ (S', c')$ эквивалентно $S \gg S'$. Для пары (S, c) определяется *риманова сумма*: $R_f(S, c) = \sum\{|I| f(c(I)) : I \in S\}$.

Основное вычисление выполняется для упорядочения по вписанности.

(а) Направленности $(D_f, \geqslant)$ и $(d_f, \geqslant)$ являются соответственно монотонно убывающей и монотонно возрастающей; значит, они сходятся.

(б) $d_f(S) \leqslant R_f(S, c) \leqslant D_f(S)$ для всех подразделений S и любых функций выбора c.

(в) Для каждого положительного числа e существует $\succ$-конфинальное подмножество множества пар (S, c) такое, что $R_f(S, c) + e \geqslant D_f(S)$. Имеет место также и двойственное утверждение.

(г) Направленность $(R_f, \succ)$ сходится в том и только в том случае, когда $\lim(D_f, \geqslant) = \lim(d_f, \geqslant)$. Если $(R_f, \succ)$ сходится, то $\lim(R_f, \succ) = \lim(D_f, \geqslant) = \lim(d_f, \geqslant)$.

(д) Направленность $(R_f, \succ)$ является поднаправленностью направленности $(R_f, \succ\succ)$.

(е) Направленность $(R_f, \succ\succ)$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim(D_f, \gg) = \lim(d_f, \gg)$. Если $(R_f, \succ\succ)$ сходится, то $\lim(R_f, \succ\succ) = \lim(R_f, \succ)$.

Замечания. Интеграл Римана от функции f обычно определяется как предел направленности $(R_f, \succ\succ)$. Рассмотрение упорядочения по вписанности наряду с упорядочением по мелкости имеет чисто технические преимущества. Если вместо конечных подразделений и длины интервалов взять счетные подразделения и лебегову меру $|I|$ множества I, то направленность $(R_f, \succ)$ будет сходиться к обычному лебегову интегралу от f, а направленность $(R_f, \succ\succ)$ — не обязательно. Далее, определение, основанное на отношении вписанности, можно применить для интегрирования некоторых функций, значения которых лежат в векторном пространстве (см. Хилле [1], глава 3). Интеграл типа Дарбу предполагает, что область значений функции, подлежащей интегрированию, частично упорядочена. К этому типу, по существу, относятся интеграл Даниеля и различные обобщения (Бурбаки [2], Мак Шейн [2] и [3] и М. Стоун [1]). Есть еще один стандартный способ введения интеграла, обладающий целым рядом преимуществ, — посредством пополнения по некоторой метрике (Халмош [1]).

И. Максимальные идеалы в структурах

Структура *) — это непустое множество X, на котором задано рефлексивное частичное упорядочение $\geqslant$ такое, что, какова бы ни была пара x, y элементов из X, среди всех элементов X, бо́льших и x, и y, существует (единственный) наименьший, обозначаемый через $x \vee y$, и среди всех элементов, меньших и x, и y, есть (единственный) наибольший элемент, обозначаемый через $x \wedge y$. Элементы $x \vee y$ и $x \wedge y$ называются соответственно *объединением* и *пересечением* элементов x и y. Говорят, что структура *дистрибутивна*, тогда и только тогда, когда $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ и $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ для всех x, y и z из X. Подмножество A структуры X называется *идеалом* (*дуальным идеалом*) в том и лишь в том случае, когда из $y \geqslant x$ и $y \in A$ всегда вытекает $x \in A$ и из $y \in A$, $z \in A$ вытекает $y \vee z \in A$ (соответственно, если из $x \geqslant y$ и $y \in A$ вытекает $x \in A$, а из $y \in A$ и $z \in A$ вытекает $y \wedge z \in A$).

Пусть A и B — непересекающиеся подмножества дистрибутивной структуры X, причем A является идеалом, а B — дуальным идеалом. Тогда существуют непересекающиеся множества A' и B', в сумме дающие все X, из которых первое является идеалом и содержит множество A, а второе является дуальным идеалом и содержит множество B.

Доказательство этого предложения распадается на ряд лемм.

(а) Семейство всех тех идеалов, которые содержат A и не пересекаются с B, обладает максимальным элементом A' (см. 0.25). Аналогичное утверждение: существует дуальный идеал B', который содержит B, не пересекается с A' и является максимальным по отношению к этим свойствам.

(б) Наименьший идеал, содержащий идеал A' и элемент c множества X, определяется так: $\{x : x \leqslant c$ *или* $x \leqslant c \vee y$ *для некоторого* y *из* $A'\}$. Из того, что A' — максимальный идеал, следует, что если элемент c не принадлежит ни A', ни B, то $c \vee x \in B$ для некоторого $x \in A'$. (Если $z \geqslant x \in B$, то $z \in B$.)

(в) Если c не принадлежит ни A', ни B', то существуют $x \in A$ и $y \in B'$ такие, что $c \vee x \in B'$ и $c \wedge y \in A'$. Тогда элемент $(c \vee x) \wedge y = (c \wedge y) \vee (x \wedge y)$ входит и в A', и в B'.

Замечания. Эта теорема принадлежит М. Стоуну [2]; она в наилучшей форме выражает один из основных фактов теории упорядоченных множеств. Мы опираемся на эту теорему при решении следующих двух задач. На ней основан также ряд важных результатов, касающихся бикомпактности (глава 5). Применение принципа максимума в том или ином виде при доказательстве

---

*) Этим термином принято в советской литературе переводить английский термин «lattice», (*Прим. перев.*)

теоремы М. Стоуна кажется неизбежным. В литературе писалось о том, что из теоремы М. Стоуна (или, точнее, из ее следствия, которое формулируется под видом задачи 2.Л) вытекает аксиома выбора. Однако мне неизвестно, так ли это на самом деле. Наконец, определение дистрибутивности, которое дано выше, избыточно: каждое из фигурирующих в нем двух равенств является следствием другого (Биркгоф [1])

К. Универсальные направленности

Направленность в множестве X называется *универсальной* тогда и только тогда, когда для каждого подмножества A множества X она либо находится с некоторого момента в A, либо находится с некоторого момента в $X \setminus A$.

(а) Если универсальная направленность часто встречается с некоторым множеством, то она с некоторого момента лежит в этом множестве. Значит, универсальная направленность в топологическом пространстве сходится к каждой своей предельной точке

(б) Если направленность универсальна, то и каждая ее поднаправленность универсальна. Если S — универсальная направленность в X и f — отображение множества X в множество Y, то $f \circ S$ — универсальная направленность в Y.

(в) Лемма. *Пусть S — какая-нибудь направленность в X. Тогда существует такое семейство $\mathfrak{C}$ подмножеств множества X, что S часто встречается с каждым элементом из $\mathfrak{C}$, пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{C}$ принадлежит $\mathfrak{C}$ и для каждого подмножества M множества X либо $M \in \mathfrak{C}$, либо $X \setminus M \in \mathfrak{C}$.* (Покажите, что есть семейство $\mathfrak{C}$, максимальное относительно первых двух свойств, и докажите затем, что оно обладает и третьим свойством, или примените утверждение 2.И, взяв в качестве A семейство всех множеств M таких, что S с некоторого момента находится в $X \setminus M$, в качестве B — семейство всех множеств L, в каждом из которых S находится с некоторого момента, а в качестве упорядочения выбрав отношение включения $\subset$.)

(г) В каждой направленности в X есть универсальная поднаправленность. (Воспользуйтесь предыдущим результатом и леммой 2.5.)

Л. Булевы кольца: существует достаточно много гомоморфизмов

Булево кольцо — это кольцо $(R, +, \cdot)$, в котором $r \cdot r = r$ и $r + r = 0$ при каждом r из R. Поле целых чисел по модулю 2 обозначается через I_2.

(а) Булево кольцо коммутативно. (Заметьте, что $(r+s)\cdot(r+s) = r+s$.)

(б) Если $(R, +, \cdot)$ — булево кольцо, то можно так определить умножение элементов R на элементы I_2, что R станет алгеброй над I_2.

(в) *Симметричная разность* $A \Delta B$ двух множеств A и B определяется как $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство всех подмножеств множества X; тогда $(\mathfrak{A}, \Delta, \cap)$ — булево кольцо с единицей.

(г) Пусть X — некоторое множество и I_2^X — семейство всех отображений множества X в I_2. Определим сложение и умножение таких отображений как поточечное (т. е. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ и $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$). Тогда $\left(I_2^X, +, \cdot\right)$ — булево кольцо с единицей, причем оно изоморфно булеву кольцу $(\mathfrak{A}, \Delta, \bigcap)$, где $\mathfrak{A}$ — семейство всех подмножеств множества X.

(д) *Естественное упорядочение* булева кольца определяется соглашением: $r\geqslant s$ тогда и только тогда, когда $r\cdot s=s$. Отношение $\geqslant$ частично упорядочивает множество R таким образом, что самый первый элемент, который следует и за r, и за s, есть $r\vee s=r+s+$ $+r\cdot s$, а наибольший элемент, предшествующий одновременно и r, и s, есть $r\wedge s=r\cdot s$. Каждая из операций $\vee$ и $\wedge$ ассоциативна, и выполняются следующие законы дистрибутивности: $r\wedge(s\vee t)=$ $=(r\wedge s)\vee(r\wedge t)$ и $r\vee(s\wedge t)=(r\vee s)\wedge(r\vee t)$.

(е) Напомним, что S называется идеалом в булевом кольце $(R, +, \cdot)$ в том и лишь в том случае, когда S — такая аддитивная подгруппа группы R, что $r\cdot s\in S$, коль скоро $r\in R$ и $s\in S$. Идеал S называется максимальным тогда и только тогда, когда $R\neq S$ и никакой идеал, отличный от всего R, не содержит идеала S в качестве собственного подмножества. Имеет место взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами булева кольца R и нетривиальными гомоморфизмами кольца R в I_2. (Ядро каждого такого гомоморфизма есть некоторый максимальный идеал.)

(ж) Критерием того, что S является идеалом в булевом кольце, может служить следующее условие: $r\vee s\in S$ для любых элементов r и s из S, и $t\in S$, коль скоро в S существует элемент, которому t предшествует в естественном порядке (т. е. если $t\leqslant$ некоторого элемента из S). Подмножество T множества R называется *дуальным идеалом*, в том и только в том случае, когда $r\wedge s\in T$ для любых r и s из T и $t\in T$, если t следует за некоторым элементом из T. Если $r\in R$, то $\{s : r\geqslant s\}$ — идеал и $\{s : s\geqslant r\}$ — дуальный идеал. Если S — некоторый идеал, T — непересекающийся с ним дуальный идеал и $S\bigcup T=R$, то функция, принимающая значение нуль на элементах S и единицу на элементах T, является гомоморфизмом кольца R в I_2. (В булевом кольце множеств идеалы часто называют $\bigcap$-идеалами, а дуальные идеалы — $\bigcup$-идеалами.)

(з) Теорема *Пусть S — некоторый идеал в булевом кольце и T — дуальный идеал, не пересекающийся с ним. Тогда существует гомоморфизм этого кольца в I_2, принимающий значение нуль на элементах S и значение единица на элементах T. В частности, если r — произвольный отличный от нуля элемент кольца, то существует гомоморфизм h рассматриваемого булева кольца (в I_2) такой, что* $h(r)=1$. (Иными словами, гомоморфизмов булева кольца в I_2 достаточно много для того, чтобы с их помощью можно было различить его элементы. Можно доказать эту теорему, исходя из утверждений, сформулированных в 2.И.)

(и) Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{B}$ — семейство всех его открыто-замкнутых подмножеств. Тогда $(\mathfrak{B}, \Delta, \bigcap)$ — булева алгебра.

(к) Не всякая булева алгебра изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого множества. (Покажите это на примере счетно-бесконечной булевой алгебры.)

Замечание. Это исследование завершается упражнением 5.У.

М. Фильтры

Можно построить теорию сходимости на основе понятия фильтра. *Фильтром* $\mathfrak{F}$ в множестве X называется любое семейство непустых подмножеств множества X такое, что:

1) пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) если $A \in \mathfrak{F}$ и $A \subset B \subset X$, то и $B \in \mathfrak{F}$.

В терминологии предыдущей задачи фильтр — это собственный дуальный идеал в булевом кольце всех подмножеств множества X. Фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к точке x топологического пространства X тогда и только тогда, когда каждая ее окрестность является элементом фильтра $\mathfrak{F}$ (т. е. система окрестностей точки x является подсемейством семейства $\mathfrak{F}$).

(а) Множество U открыто в том и только в том случае, когда U принадлежит каждому фильтру, сходящемуся к какой-либо точке множества U.

(б) Точка x является предельной точкой для множества A тогда и только тогда, когда множество $A \setminus \{x\}$ принадлежит некоторому фильтру, сходящемуся к x.

(в) Обозначим через φ_x семейство всех фильтров, сходящихся к точке x. Тогда $\bigcap \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \in \varphi_x\}$ — система всех окрестностей точки x.

(г) Если фильтр $\mathfrak{F}$ сходится к точке x и G — фильтр, содержащий $\mathfrak{F}$, то G сходится к x.

(д) Фильтр в X называется *ультрафильтром* тогда и только тогда, когда он не содержится в качестве собственного подмножества ни в каком фильтре в X. Если $\mathfrak{F}$ — ультрафильтр в X, и объединение каких-либо двух множеств является элементом семейства $\mathfrak{F}$, то хотя бы одно из этих множеств входит в $\mathfrak{F}$. В частности, для любого подмножества A множества X либо A, либо $X \setminus A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ (См. задачу 2.И.)

(е) Можно заподозрить, что фильтры и направленности ведут к эквивалентным по существу теориям. Основания для такого предположения можно видеть в следующих фактах:

1) Если $\{x_n, n \in D\}$ — направленность в X, то семейство $\mathfrak{F}$ всех множеств A, в каждое из которых $\{x_n, n \in D\}$ попадает с некоторого момента, является фильтром в X.

2) Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр в X и D — множество всех пар (x, F) таких, что $x \in F$ и $F \in \mathfrak{F}$. Направим множество D так: $(y, G) \geqslant (x, F)$ в том и лишь в том случае, когда $G \subset F$, и положим $f(x, F) = x$. Тогда $\mathfrak{F}$ состоит в точности из всех тех множеств A, в которые направленность $\{f(x, F), (x, F) \in D\}$ попадает с некоторого момента.

Замечания. Определение фильтра принадлежит Картану. Картаново изложение теории сходимости приведено полностью в книге Бурбаки [1]. Предложение (в) — замечание Готтшалка; утверждение (е) высказано в устной беседе.