Глава 3

ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

В этой главе мы рассмотрим два способа построения новых топологических пространств из старых. Один из них заключается в определении некоторой стандартной топологии на декартовом произведении топологических пространств; этим самым по первоначально заданным пространствам определяется некоторое новое. Например, евклидова плоскость является произведением пространства вещественных чисел (с обычной топологией) самого на себя, а евклидово n-пространство является произведением n экземпляров пространства вещественных чисел. В главе 4 произведения произвольного множества пространств вещественных чисел послужат нам в качестве стандартных пространств, с которыми прочие будут сравниваться. При втором методе построения нового пространства из заданного начинают с некоторого разбиения заданного пространства на классы эквивалентности — эти классы служат точками конструируемого пространства. Грубо говоря, мы «отождествляем» точки внутри некоторых подмножеств множества X. В результате получается некоторое новое множество точек, которое затем наделяется определенной фактор-топологией. Множество классов эквивалентности вещественных чисел по модулю множества целых чисел при этом получает топологию, превращающую его в «копию» единичной окружности, лежащей на плоскости и наследующей у нее топологию.

Оба способа построения пространств мотивируются тем, что определенные отображения становятся при этом непрерывными. Мы начнем поэтому с определения понятия непрерывности и доказательства нескольких связанных с ним простых предложений.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Приведем для удобства краткий обзор терминологии и элементарных предложений, связанных с понятием отображения (глава 0). Слова «функция», «отображение», «соответствие», «оператор» и «преобразование» являются синонимами. Говорят, что функция f является отображением (множества, пространства и т. д.) X, тогда и только тогда, когда область определения функции f есть X. Говорят, далее, что f является отображением *в* Y, в том и лишь в том случае, когда область значений этого отображения является подмножеством множества Y, и что f — отображение *на* Y, в том и лишь в том случае, когда область значений f совпадает с Y. Значение f в точке x обозначается через $f(x)$ и называется также образом точки x при отображении f. Прообраз подмножества B множества Y при отображении f обозначается через $f^{-1}[B]$ — это множество $\{x: f(x) \in B\}$. Прообраз пересечения (объединения) элементов любого семейства множеств из Y при отображении f совпадает с пересечением (объединением) прообразов этих элементов. Иными словами, если Z_c — подмножество множества Y для каждого элемента c из некоторого множества индексов C, то $f^{-1}[\bigcap\{Z_c : c \in C\}] = \bigcap\{f^{-1}[Z_c] : c \in C\}$; аналогичная формула справедлива для объединений. Пусть $y \in Y$; в этом случае запись $f^{-1}[\{y\}]$, обозначающая прообраз множества, единственным элементом которого является точка y, будет сокращаться до такой записи: $f^{-1}[y]$. Образ $f[A]$ множества A, лежащего в X, представляет собой множество всех таких $y \in Y$, что $f(x) = y$ для некоторого x из A. Образ объединения множеств из X равен объединению их образов, но, вообще говоря, образ пересечения не равен пересечению образов. Отображение f называется взаимно однозначным тогда и только тогда, когда образы любых двух различных точек при нем различны. В этом случае f^{-1} является отображением, обратным к отображению f. (Обратите внимание на то, как подобраны обозначения: квадратные скобки встречаются в обозначениях подмножеств из области определения и области значений отображения, а круглые — в обозначениях элементов. Например, если f — взаимно однозначное отображение на Y и $y \in Y$, то $f^{-1}(y)$ — тот единственный элемент из X, для которого $f(x)=y$, а $f^{-1}[y]=\{x\}$.)

Отображение f топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$ в топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ называется *непрерывным* в том и только в том случае, когда прообраз каждого открытого множества открыт. Точнее, f непрерывно относительно топологий $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{U}$, или $\mathfrak{T}$ — $\mathfrak{U}$-непрерывно, тогда и только тогда, когда $f^{-1}[U] \in \mathfrak{T}$ для каждого U из $\mathfrak{U}$. Непрерывно отображение или нет — это зависит и от того, какая топология задана на области определения, и от того, какая топология задана на области значений. Однако мы будем следовать обычной практике, опуская все указания на эти топологии, когда можно не опасаться недоразумений. Есть одно или два утверждения о непрерывных отображениях, которые чрезвычайно важны и одновременно почти очевидны. Первое: если f — непрерывное отображение пространства X в Y и g — непрерывное отображение пространства Y в Z, то композиция $g \circ f$ является непрерывным отображением пространства X в пространство Z, ибо $(g \circ f)^{-1}[V] = f^{-1}[g^{-1}[V]]$ для каждого множества $V \subset Z$, откуда, пользуясь сначала непрерывностью отображения g, а затем непрерывностью f, заключаем, что если множество V открыто, то открыто и множество $(g \circ f)^{-1}[V]$. Пусть f — непрерывное отображение пространства X в пространство Y и A — подмножество пространства X. Тогда сужение отображения f на множество A, $f|A$, тоже является непрерывным отображением относительно топологии, индуцированной на A топологией пространства X, ибо если U открыто в Y, то $(f|A)^{-1}[U] = A \cap f^{-1}[U]$, а последнее множество открыто в A. Отображение f, для которого отображение $f|A$ непрерывно, называется *непрерывным на множестве* A. Может случиться, что f непрерывно на A, но не непрерывно на X.

Ниже мы даем список условий, каждое из которых эквивалентно непрерывности. Так как непрерывность отображений часто приходится доказывать, этот список нам будет полезен в дальнейшем.

1. Теорема. *Пусть X и Y — топологические пространства и f — отображение X в Y. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(а) *Отображение f непрерывно.*

(б) *Прообраз каждого замкнутого множества замкнут.*

(в) *Прообраз каждого элемента некоторой предбазы топологии пространства Y открыт.*

(г) *Для любой точки $x \in X$ прообраз произвольной окрестности точки $f(x)$ является окрестностью точки x.*

(д) *Для каждой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки $f(x)$ существует окрестность V точки x такая, что $f[V] \subset U$.*

(е) *Для любой направленности S (или $\{S_n, n \in D\}$) в X, сходящейся к некоторой точке s, композиция $f \circ S$ (или $\{f(S_n), n \in D\}$) сходится к точке $f(s)$.*

(ж) *Образ замыкания произвольного подмножества A множества X является подмножеством замыкания образа множества A,* т. е. $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.

(з) *Для каждого подмножества B пространства Y* $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\overline{B}]$.

Доказательство. (а)$\leftrightarrow$(б). Это вытекает непосредственно из того, что обратное отображение сохраняет относительное дополнение: $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$ для каждого подмножества B пространства Y.

(а)$\leftrightarrow$(в). Если f — непрерывное отображение, то прообраз произвольного элемента предбазы открыт, потому что предбаза состоит из открытых множеств. Обратно, так как каждое открытое в Y множество V является объединением конечных пересечений элементов предбазы *), то множество $f^{-1}[V]$ является объединением конечных пересечений прообразов элементов рассматриваемой предбазы. Если эти прообразы открыты, то и прообраз каждого открытого множества открыт.

(а)$\rightarrow$(г). Если отображение f непрерывно, $x \in X$ и V — окрестность точки $f(x)$, то в V содержится открытая окрестность W точки $f(x)$. Тогда $f^{-1}[W]$ — открытая окрестность точки x, являющаяся подмножеством множества $f^{-1}[V]$. Следовательно, $f^{-1}[V]$ — окрестность точки x.

(г)$\rightarrow$(д). Если U — окрестность точки $f(x)$, то $f^{-1}[U]$— окрестность точки x, для которой $f[f^{-1}[U]] \subset U$.

---

*) Под «конечным пересечением» здесь и в дальнейшем понимается пересечение конечного числа множеств. (*Прим. перев.*)

(д)→(е). Предположим, что условие (д) выполнено, и пусть S — направленность в X, сходящаяся к некоторой точке s. Для произвольной окрестности U точки $f(s)$ найдется окрестность V точки s такая, что $f[V] \subset U$. Так как направленность S с некоторого момента находится в V, то направленность $f \circ S$ с некоторого момента находится в U.

(е)→(ж). Пусть дано (е), A — любое подмножество множества X, а s — точка из его замыкания. Тогда в A существует направленность S, сходящаяся к s. Тогда направленность $f \circ S$ сходится к точке $f(s)$, которая поэтому принадлежит множеству $\overline{f[A]}$. Значит, $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]}$.

(ж) → (з). Пусть выполнено условие (ж). Тогда, если $A = f^{-1}[B]$, то $f[\bar{A}] \subset \overline{f[A]} \supset \bar{B}$ и, следовательно, $\bar{A} \subset \subset f^{-1}[\bar{B}]$. Таким образом, $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\bar{B}]$.

(з)→(б). Пусть выполнено условие (з), и B — замкнутое подмножество множества Y. Тогда $\overline{f^{-1}[B]} \subset f^{-1}[\bar{B}] = = f^{-1}[B]$, откуда следует, что множество $f^{-1}(B)$ замкнуто.

Полезен также локальный вариант понятия непрерывности. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *непрерывным в точке* $x \in X$ тогда и только тогда, когда прообраз каждой окрестности $f(x)$ при отображении f является окрестностью точки x. Непрерывность в точке легко охарактеризовать утверждениями, аналогичными 3.1(д) и 3.1(е). Очевидно, отображение f непрерывно в том и лишь в том случае, когда оно непрерывно в каждой точке своей области определения.

Гомеоморфизм, или *топологическое преобразование*, есть непрерывное взаимно однозначное отображение некоторого топологического пространства X на некоторое топологическое пространство Y, обратное отображение к которому f^{-1} тоже непрерывно. Про два пространства говорят, что они *гомеоморфны*, или что одно является *гомеоморфом* другого, если существует гомеоморфизм одного пространства на другое. Тождественное отображение топологического пространства на себя всегда является гомеоморфизмом, и обратное к гомеоморфизму отображение тоже является гомеоморфизмом. Ясно также, что композиция любых двух гомеоморфизмов снова является гомеоморфизмом. Следовательно, семейство всех топологических пространств можно разбить на классы эквивалентности так, что каждое топологическое пространство гомеоморфно любому пространству, входящему в его класс эквивалентности, и только таким пространствам. Два топологических пространства топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда они гомеоморфны.

Дискретные пространства X и Y гомеоморфны в тех и лишь в тех случаях, когда существует взаимно однозначное отображение множества X на множество Y, т. е. когда равны их мощности. Это действительно так, ибо любое отображение дискретного пространства непрерывно, независимо от того, какую топологию имеет его область значений. Верно также, что антидискретные пространства (в них единственными открытыми подмножествами являются все пространство и пустое множество) гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение одного из них на другое, ибо любое отображение в антидискретное пространство непрерывно, независимо от того, какая топология задана на его области определения. Вообще говоря, может оказаться очень трудным выяснить, гомеоморфны ли заданные пространства. Множество всех вещественных чисел с обычной топологией гомеоморфно открытому интервалу $(0,1)$, наделенному индуцированной топологией: функция, значение которой на элементе x из $(0,1)$ равно $\frac{2x-1}{x(x-1)}$, является, как легко видеть, гомеоморфизмом. Однако интервал $(0,1)$ не гомеоморфен пространству $(0,1) \cup (1,2)$, ибо если бы функция f была гомеоморфизмом (или хотя бы непрерывной функцией) с областью определения $(0,1)$ и областью значений $(0,1) \cup (1,2)$, то множество $f^{-1}[(0,1)]$ было бы собственным открыто-замкнутым подмножеством множества $(0,1)$, в то время как множество $(0,1)$ связно. Нам удалось доказать отсутствие гомеоморфизма в рассмотренном случае благодаря тому, что мы заметили, что одно пространство связно, а другое нет и что пространство, гомеоморфное связному пространству, непременно связно. Свойство топологического пространства, принадлежащее каждому пространству, гомеоморфному данному, называется *топологическим инвариантом*. Доказательство того, что два пространства не гомеоморфны, обычно заключается в выделении топологического инварианта, которым обладает одно из них и не обладает другое. Каждое свойство, которое определяется в терминах элементов пространства и его топологии, автоматически оказывается топологическим инвариантом. Помимо связности, топологическими инвариантами являются свойства пространства иметь счетную базу топологии, иметь счетную базу в каждой точке, быть T_1-пространством или хаусдорфовым пространством. Говоря формально, топология — это наука о топологических инвариантах.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

На декартовом произведении семейства топологических пространств можно стандартным способом определить топологию. Это чрезвычайно важная конструкция, поэтому мы остановимся сейчас на исследовании свойств предлагаемой топологии. Пусть X и Y — топологические пространства и $\mathfrak{B}$ — семейство всех декартовых произведений вида $U \times V$, где U — множество, открытое в X, и V — множество, открытое в Y. Пересечение двух элементов из $\mathfrak{B}$ есть снова элемент из $\mathfrak{B}$ ибо $(U \times V) \cap (R \times S) = (U \cap R) \times (V \cap S)$. Следовательно, по теореме 1.11 $\mathfrak{B}$ — база некоторой топологии на множестве $X \times Y$. Эта топология называется *топологией произведения* на $X \times Y$. Подмножество W множества $X \times Y$ открыто в топологии произведения в том и только в том случае, когда для каждого элемента $(x, y) \in W$ можно найти открытые окрестности U и V точек x и y соответственно такие, что $U \times V \subset W$. Пространства X и Y называются *координатными пространствами*, а отображения P_0 и P_1, первое из которых переводит точку $(x, y) \in X \times Y$ в x, а второе — в y, называются *проектированиями* на координатные пространства. Эти проектирования являются непрерывными отображениями, ибо если U открыто в X,