но. Свойство топологического пространства, принадлежащее каждому пространству, гомеоморфному данному, называется *топологическим инвариантом.* Доказательство того, что два пространства не гомеоморфны, обычно заключается в выделении топологического инварианта, которым обладает одно из них и не обладает другое. Каждое свойство, которое определяется в терминах элементов пространства и его топологии, автоматически оказывается топологическим инвариантом. Помимо связности, топологическими инвариантами являются свойства пространства иметь счетную базу топологии, иметь счетную базу в каждой точке, быть T_1-пространством или хаусдорфовым пространством. Говоря формально, топология — это наука о топологических инвариантах.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ

На декартовом произведении семейства топологических пространств можно стандартным способом определить топологию. Это чрезвычайно важная конструкция, поэтому мы остановимся сейчас на исследовании свойств предлагаемой топологии. Пусть X и Y — топологические пространства и $\mathfrak{B}$ — семейство всех декартовых произведений вида $U\times V$, где U — множество, открытое в X, и V — множество, открытое в Y. Пересечение двух элементов из $\mathfrak{B}$ есть снова элемент из $\mathfrak{B}$ ибо $(U\times V)\cap(R\times S)=(U\cap R)\times(V\cap S)$. Следовательно, по теореме 1.11 $\mathfrak{B}$ — база некоторой топологии на множестве $X\times Y$. Эта топология называется *топологией произведения* на $X\times Y$. Подмножество W множества $X\times Y$ открыто в топологии произведения в том и только в том случае, когда для каждого элемента $(x, y)\in W$ можно найти открытые окрестности U и V точек x и y соответственно такие, что $U\times V\subset W$. Пространства X и Y называются *координатными пространствами*, а отображения P_0 и P_1, первое из которых переводит точку $(x, y)\in X\times Y$ в x, а второе — в y, называются *проектированиями* на координатные пространства. Эти проектирования являются непрерывными отображениями, ибо если U открыто в X, то $P_0^{-1}[U]=U\times Y$ — множество, открытое в $X\times Y$. Непрерывность проектирований может быть на самом деле положена в основу описания топологии произведения. А именно, пусть $\mathfrak{J}$ — какая-нибудь топология на $X\times Y$, относительно которой оба проектирования непрерывны. Тогда, если U открыто в X, а V открыто в Y, то множество $U\times V$ открыто в $\mathfrak{J}$, ибо $U\times V=P_0^{-1}[U]\cap P_1^{-1}[V]$, а стоящие справа множества открыты относительно $\mathfrak{J}$ в силу непрерывности проектирований. Следовательно, $\mathfrak{J}$ больше топологии произведения, т. е. топология произведения — наименьшая среди тех топологий, относительно которых проектирования на координатные пространства непрерывны.

Не составляет труда распространить данное определение топологии произведения на случай декартова произведения любого конечного числа координатных пространств. Пусть X_0, X_1, ..., X_{n-1} — топологические пространства. Базу топологии произведения на декартовом произведении $X_0\times X_1\times\ldots\times X_{n-1}$ образует семейство всевозможных множеств вида $U_0\times U_1\times\ldots\times U_{n-1}$, где U_i — произвольное множество, открытое в X_i. В частности, если каждое X_i есть множество вещественных чисел с обычной топологией, то пространство произведения есть *евклидово n-пространство* E^n. Элементами пространства E^n являются всевозможные вещественные функции, определенные на множестве 0, 1, ..., $n-1$; значение функции x на элементе i обозначается через $x_i(=x(i))$.

Теперь будет определена топология произведения на декартовом произведении произвольного семейства топологических пространств. Предположим, что для каждого элемента a из какого-то множества индексов A задано некоторое множество X_a. Декартово произведение $\Pi\{X_a : a\in A\}$ определяется как множество всех таких функций x на A, что $x_a\in X_a$ для каждого a из A. Множество X_a называется a-м координатным множеством. Проектирование P_a произведения на a-е координатное множество определяется формулой $P_a(x)=x_a$. Предположим, что на каждом координатном множестве задана некоторая топология $\mathfrak{J}_a$. Конструкция топологии произведения, которая будет описана, мотивируется *) требованием, чтобы каждое проектирование P_a было непрерывным отображением. Чтобы обеспечить непрерывность всех проектирований, необходимо и достаточно, чтобы были открытыми все множества вида $P_a^{-1}[U]$, где U — произвольное множество, открытое в X_a. Семейство всех таких множеств образует предбазу некоторой топологии. Ясно, что эта топология — наименьшая среди тех, относительно которых проектирования непрерывны. Это и есть *топология произведения*. Элементы определенной нами предбазы имеют вид $\{x : x_a \in U\}$, где U может быть любым открытым подмножеством пространства X_a. Интуитивно они ассоциируются с цилиндрами над открытыми подмножествами координатных пространств. Иногда говорят, что элементы рассматриваемой предбазы получаются «ограничением a-й координаты некоторым открытым подмножеством a-го координатного пространства». Базу топологии произведения образует семейство всевозможных конечных пересечений элементов указанной предбазы. Произвольный элемент U этой базы имеет вид $\bigcap \{P_a^{-1}[U_a] : a \in F\} = \{x : x_a \in U_a \text{ для каждого } a \text{ из } F\}$, где F — конечное подмножество множества A и U_a — открытое подмножество пространства X_a для каждого a из F. Отметим, что речь идет о *конечных* пересечениях **). Вообще говоря, не верно, что множество вида $\Pi\{U_a : a \in A\}$ открыто в топологии произведения, если каждое U_a открыто в X_a. *Пространство произведения*, или *произведение пространств*, — это декартово произведение этих пространств, наделенное топологией произведения.

Проектирования пространства произведения на координатные пространства обладают еще одним очень полезным свойством. Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y называется *открытым* тогда и только тогда, когда образ каждого открытого множества открыт, т. е. когда из того, что множество U открыто в пространстве X, следует, что множество $f[U]$ открыто в пространстве Y.

---

*) Предлагаемое описание топологии произведения принадлежит Бурбаки.

**) См. примечание на стр. 122.

2. Теорема. *Проектирование пространства произведения на произвольное его координатное пространство открыто.*

Доказательство. Обозначим через P_c проектирование пространства $\Pi\{X_a : a \in A\}$ на пространство X_c. Чтобы показать, что отображение P_c открыто, достаточно убедиться, что образ произвольной окрестности любой точки x произведения является окрестностью точки $P_c(x)$. Можно при этом предположить, что окрестность, выбранная в пространстве произведения, принадлежит описанной выше базе его топологии. Пусть $x \in V = \{y : y_a \in U_a$ *при* a *из* $F\}$, где F — некоторое конечное подмножество множества A и U_a — множество, открытое в X_a для каждого a из F. Мы построим копию пространства X_c, содержащую точку x. Для произвольного $z \in X_c$ положим $f(z)_c = z$, и пусть при $a \neq c$ будет $f(z_a) = x_a$. Тогда $P_c \circ f(z) = z$. Если $c \notin F$, то ясно, что $f[X_c] \subset V$ и $P_c[V] = X_c$ — открытое множество. Если $c \in F$, то $f(z) \in V$ в том и лишь в том случае, когда $z \in U_c$; тогда $P_c[V] = U_c$. Этим теорема доказана. (Заметим, что построенное в приведенном доказательстве отображение f является гомеоморфизмом, — иногда этот факт бывает полезен.)

Можно было бы подумать, что проекция множества, замкнутого в произведении пространств, всегда замкнута. Однако легко видеть, что это неверно, ибо подмножество $\{(x, y) : xy = 1\}$ евклидовой плоскости, будучи само замкнутым, обладает незамкнутыми проекциями на координатные пространства.

Есть очень полезная характеристика непрерывности тех отображений, область значений которых является подмножеством некоторого произведения пространств.

3. Теорема. *Отображение f топологического пространства в пространство произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$ непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывна каждая из композиций $P_a \circ f$, где $a \in A$.*

Доказательство. Если f — непрерывное отображение, то и отображение $P_a \circ f$ непрерывно, ибо проектирование P_a непрерывно. Если отображение $P_a \circ f$ непрерывно при каждом a, то для каждого открытого множества U из X_a множество $(P_a \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[P_a^{-1}[U]]$

открыто. Отсюда следует, что прообраз при f каждого элемента выбранной выше предбазы пространства произведения открыт. Значит, в силу утверждения 3.1(в) f — непрерывное отображение.

Сходимость в пространстве произведения можно очень просто описать в терминах проекций.

4. Теорема. *Направленность S в пространстве произведения сходится к точке s в том и только в том случае, когда ее проекция в произвольное координатное пространство сходится к проекции точки s.*

Доказательство. Так как проектирование на произвольное координатное пространство непрерывно, то из сходимости направленности $\{S_n,\ n \in D\}$ в произведении $\Pi\{X_a : a \in A\}$ к точке s следует, что направленность $\{P_a(S_n),\ n \in D\}$ сходится к $P_a(s)$. Докажем обратное. Пусть $\{S_n,\ n \in D\}$ — такая направленность, что $\{P_a(S_n),\ n \in D\}$ сходится к s_a для каждого a из A. Тогда, какова бы ни была открытая окрестность U_a точки s_a, направленность $\{P_a(S_n),\ n \in D\}$ находится с некоторого момента в множестве U_a и, значит, направленность $\{S_n,\ n \in D\}$ находится с того же момента в множестве $P_a^{-1}[U_a]$. Но тогда направленность $\{S_n,\ n \in D\}$ должна находиться с некоторого момента в любом конечном пересечении множеств вида $P_a^{-1}[U_a]$. Так как семейство всевозможных таких конечных пересечений образует базу топологии произведения в точке s, то направленность $\{S_n,\ n \in D\}$ сходится к s.

Сходимость относительно топологии произведения называется *покоординатной*, или *поточечной*, *сходимостью*. Обычно последний термин употребляется, когда все координатные пространства идентичны. В этом важном специальном случае декартово произведение $\Pi\{X : a \in A\}$ есть просто множество всех функций, определенных на A, со значениями в X, и обычно обозначается через X^A. Направленность $\{F_n,\ n \in D\}$ в множестве X^A сходится к функции f в топологии поточечной сходимости тогда и только тогда, когда направленность $\{F_n(a),\ n \in D\}$ сходится к $f(a)$ при каждом a из A. Этот факт оправдывает название «поточечная сходимость». Топологию произведения называют в этом случае еще и топологией *простой сходимости*.

Естественно поинтересоваться, когда произведение топологических пространств наследует свойства, которыми обладают координатные пространства? Например, можно спросить, будет ли пространство произведения хаусдорфовым или будет ли оно удовлетворять первой или второй аксиоме счетности, если каждое из координатных пространств обладает соответствующим свойством? Следующие теоремы содержат ответы на эти вопросы.

5. Теорема. *Произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым пространством.*

Доказательство. Если x и y — разные точки произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$, то $x_a \neq y_a$ для некоторого a из A. Если каждое координатное пространство хаусдорфово, то у точек x_a и y_a есть непересекающиеся открытые окрестности U и V соответственно. Тогда $P_a^{-1}[U]$ и $P_a^{-1}[V]$ — непересекающиеся окрестности точек x и y в произведении.

Напомним, что антидискретным называется такое топологическое пространство, в котором единственными открытыми множествами являются пустое множество и все пространство.

6. Теорема. *Пусть X_a для каждого элемента a из некоторого множества индексов A — пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности. Пространство произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности в том и только в том случае, когда все, за исключением счетного множества, пространства X_a антидискретны.*

Доказательство. Пусть B — счетное подмножество множества A и все X_a при $a \in A \setminus B$ антидискретны. Рассмотрим произвольную точку x пространства произведения. Выберем для каждого a из A некоторую счетную базу $\mathfrak{U}_a$ системы окрестностей точки x_a в пространстве X_a. Тогда $\mathfrak{U}_a = \{X_a\}$ для каждого $a \in A \setminus B$. Рассмотрим семейство всех конечных пересечений множеств вида $P_a^{-1}[U]$, где $a \in A$ и $U \in \mathfrak{U}_a$. Это семейство счетно, так как $P_a^{-1}[U] = \Pi\{X_b : b \in A\}$ при $a \in A \setminus B$ Но совокупность этих конечных пересечений образует базу системы окрестностей в точке x. Следовательно, пространство произведения удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Докажем обратное. Пусть B — такое несчетное подмножество множества A, что для каждого a из B у точки x_a в X_a есть окрестность, являющаяся собственным подмножеством множества X_a, и пусть существует счетная база $\mathfrak{U}$ топологии в точке x. Каждый элемент U базы $\mathfrak{U}$ содержит некоторый элемент стандартной базы, через посредство которой вводилась выше топология произведения. Следовательно, $P_a[U]=X_a$ для всех a из A, за исключением конечного числа. Так как множество B несчетно, то найдется элемент a в B такой, что $P_a[U]=X_a$ для каждого U из $\mathfrak{U}$. Но у точки x_a есть открытая окрестность V, являющаяся собственным подмножеством множества X_a. Ясно, что никакой элемент базы $\mathfrak{U}$ не является подмножеством множества $P_a^{-1}[V]$, так как каждый элемент из $\mathfrak{U}$ проектируется на все X_a. Получилось противоречие.

Верно также, что и координатные пространства наследуют определенные свойства пространства произведения. Если пространство произведения хаусдорфово, то хаусдорфово и каждое координатное пространство, и если пространство произведения удовлетворяет в каждой точке первой аксиоме счетности, то то же можно сказать и о каждом координатном пространстве. Эти утверждения доказываются легко, мы этого делать не будем.

7. Замечания. Топология произведения была определена А. Н. Тихоновым. В двух классических работах [1] и [2] им были получены важнейшие результаты, которые ныне стали стандартными инструментами общей топологии (см. также главу 5). До работ Тихонова много исследований посвящалось сходимости последовательностей функций относительно топологии поточечной сходимости. При этом возникало много трудностей, ибо эту топологию нельзя полностью описать в терминах сходящихся последовательностей, по крайней мере в самых интересных случаях (см. задачу 3. И).

ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

Начнем с краткого обзора тех рассмотрений, которые привели к определению топологии произведения. Пусть f — функция на множестве X со значениями в топологи-