Докажем обратное. Пусть B — такое несчетное подмножество множества A, что для каждого a из B у точки x_a в X_a есть окрестность, являющаяся собственным подмножеством множества X_a, и пусть существует счетная база $\mathfrak{U}$ топологии в точке x. Каждый элемент U базы $\mathfrak{U}$ содержит некоторый элемент стандартной базы, через посредство которой вводилась выше топология произведения. Следовательно, $P_a[U]=X_a$ для всех a из A, за исключением конечного числа. Так как множество B несчетно, то найдется элемент a в B такой, что $P_a[U]=X_a$ для каждого U из $\mathfrak{U}$. Но у точки x_a есть открытая окрестность V, являющаяся собственным подмножеством множества X_a. Ясно, что никакой элемент базы $\mathfrak{U}$ не является подмножеством множества $P_a^{-1}[V]$, так как каждый элемент из $\mathfrak{U}$ проектируется на все X_a. Получилось противоречие.

Верно также, что и координатные пространства наследуют определенные свойства пространства произведения. Если пространство произведения хаусдорфово, то хаусдорфово и каждое координатное пространство, и если пространство произведения удовлетворяет в каждой точке первой аксиоме счетности, то то же можно сказать и о каждом координатном пространстве. Эти утверждения доказываются легко, мы этого делать не будем.

7. Замечания. Топология произведения была определена А. Н. Тихоновым. В двух классических работах [1] и [2] им были получены важнейшие результаты, которые ныне стали стандартными инструментами общей топологии (см. также главу 5). До работ Тихонова много исследований посвящалось сходимости последовательностей функций относительно топологии поточечной сходимости. При этом возникало много трудностей, ибо эту топологию нельзя полностью описать в терминах сходящихся последовательностей, по крайней мере в самых интересных случаях (см. задачу 3. И).

ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

Начнем с краткого обзора тех рассмотрений, которые привели к определению топологии произведения. Пусть f — функция на множестве X со значениями в топологическом пространстве Y. На множестве X всегда можно так определить топологию, чтобы f стала непрерывной. Одна из таких топологий очевидна и неинтересна — это дискретная топология. Более интересную топологию, удовлетворяющую поставленному условию, образует семейство $\mathfrak{J}$ всех множеств вида $f^{-1}[U]$, где U — произвольное множество, открытое в Y. Это действительно топология, ибо переход к прообразу сохраняет операции объединения и пересечения. Каждая топология, относительно которой отображение f непрерывно, содержит топологию $\mathfrak{J}$. Следовательно, $\mathfrak{J}$ — наименьшая из всех топологий, относительно которых f непрерывно. Если задано некоторое семейство функций — по одной функции f_a для каждого элемента a из некоторого множества индексов A, — то топология, предбазой которой служит семейство всех множеств вида f_a^{-1} $[U]$, где $a \in A$ и U — открытое подмножество области значений функции f_a, обладает в точности теми же свойствами. Этот путь как раз и привел к определению топологии произведения.

Целью данного параграфа является исследовать обратную проблему. Пусть f — функция, определенная на топологическом пространстве X с областью значений Y. Как задать топологию на множестве Y, чтобы функция f стала непрерывной? Если подмножество U множества Y открыто в какой-либо из тех топологий, относительно которых функция f непрерывна, то множество $f^{-1}[U]$ открыто в пространстве X. С другой стороны, семейство $\mathfrak{U}$ всех подмножеств U множества Y, для которых $f^{-1}[U]$ открыто в X, образует топологию на Y, ибо прообраз пересечения (или объединения) элементов из этого семейства является пересечением (объединением) их прообразов. Топология $\mathfrak{U}$, следовательно, будет наибольшей из всех топологий на Y, относительно которых f непрерывна; она называется *фактор-топологией* *) на Y (фактор-топологией относительно отображения f и топологии, заданной на X). Подмножество B множества Y

---

*) Понятие фактор-пространства впервые было определено в книге П. С. Александрова и Хопфа [1]. (*Прим. перев.*)

замкнуто относительно фактор-топологии тогда и только тогда, когда $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}[B]$ открыто в X. Следовательно, множество B замкнуто тогда и только тогда, когда его прообраз $f^{-1}[B]$ замкнут.

Без дополнительных жестких ограничений на f о фактор-топологии можно сказать очень мало*). Поэтому мы будем рассматривать только отображения, принадлежащие к одной из двух двойственных категорий. Напомним, что отображение f одного топологического пространства в другое называется *открытым* в том и лишь в том случае, когда образ каждого открытого множества открыт. Отображение f называется *замкнутым* в том и лишь в том случае, когда образ каждого замкнутого множества замкнут. Уже отмечалось, что проектирование евклидовой плоскости на ее первое координатное пространство является открытым, не замкнутым отображением. Беря подпространства плоскости, можно построить замкнутые отображения, которые не открыты, и непрерывные отображения, не являющиеся ни открытыми, ни замкнутыми. Подпространство $X = \{(x, y) : x = 0$ *или* $y = 0\}$, состоящее из точек двух осей, отображается на пространство вещественных чисел посредством проектирования $P(x, y) = x$. Образ малой окрестности точки $(0, 1)$ состоит тогда из одной лишь точки 0. Следовательно, отображение P на множество X не открыто; но легко проверить, что оно замкнуто. Если точку $(0,0)$ удалить, то на оставшемся подпространстве $X \setminus \{0, 0\}$ отображение P не будет ни открытым, ни замкнутым (образ замкнутого множества $\{(x, y)$: $y = 0$ *и* $x \neq 0\}$ не замкнут).

Ясно из определения, что открыто ли отображение или же замкнуто — это зависит, в частности, от того, какая топология задана на его области значений. Однако если известно, что отображение f непрерывно и либо открыто, либо замкнуто, то топология его области значений однозначно определяется топологией, заданной на области определения, и отображением f.

---

*) Сейчас в этой области достигнут ряд продвижений; см., например, Архангельский [1], Стоун [2], Чобан [1], [2]. *(Прим. перев.)*

8. Теорема. *Если отображение f топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ на топологическое пространство $(Y, \mathfrak{U})$ открыто или замкнуто, то $\mathfrak{U}$ — фактор-топология.*

Доказательство. Если отображение f открыто и U — подмножество множества Y, прообраз которого $f^{-1}[U]$ открыт, то множество $U=f[f^{-1}(U)]$ открыто в топологии $\mathfrak{U}$. Следовательно, если f — открытое отображение, то каждое множество, открытое относительно фактор-топологии, открыто и относительно топологии $\mathfrak{U}$. Если f не только открыто, но еще и непрерывно, то, поскольку фактор-топология — наибольшая среди тех топологий, относительно которых отображение f непрерывно, топология $\mathfrak{U}$ совпадает с фактор-топологией. Чтобы доказать нашу теорему для случая замкнутого отображения f, достаточно заменить всюду в предшествующем рассуждении слово «открытое» на слово «замкнутое».

Отображение f топологического пространства в произведение пространств непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна композиция отображения f с каждым проектированием. У этого утверждения есть аналог, касающийся фактор-пространств.

9. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение пространства X на пространство Y, топология которого является фактор-топологией. Тогда отображение g пространства Y в пространство Z непрерывно в том и только в том случае, когда непрерывна композиция $g\circ f$.*

Доказательство. Пусть U — произвольное множество, открытое в Z, и отображение $g\circ f$ непрерывно. Тогда $(g\circ f)^{-1}[U]=f^{-1}[g^{-1}[U]]$ — множество, открытое в X. Значит, и множество $g^{-1}[U]$ открыто в силу определения фактор-топологии. Обратное утверждение ясно.

Почти очевидно, что, изучая фактор-топологии и свойства открытых и замкнутых отображений, нам, по существу, незачем привлекать топологическое пространство, являющееся областью значений. Действительно, если f — непрерывное отображение топологического пространства X на пространство Y, имеющее фактор-топологию, то можно построить топологическую копию пространства Y, исходя из множества X, топологии, заданной на нем, и семейства всех множеств вида $f^{-1}[y]$, где $y\in Y$. Построение осуществляется следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{D}$ семейство всех подмножеств множества X, имеющих вид $f^{-1}[y]$, где $y \in Y$, и пусть P — отображение пространства X на множество $\mathfrak{D}$, значение которого на x есть $f^{-1}[f(x)]$. Для каждого элемента y из Y положим $g(y) = f^{-1}[y]$. Тогда g — взаимно однозначное отображение множества Y на $\mathfrak{D}$, причем $g \circ f = P$ и $f = g^{-1} \circ P$. Если наделить множество $\mathfrak{D}$ фактор-топологией (относительно отображения P), то из предыдущей теоремы будет следовать, что g — непрерывное отображение (так как $g \circ f = P$) и что g^{-1} — непрерывное отображение (так как $g^{-1} \circ P = f$) Следовательно, g — гомеоморфизм.

Предшествующие замечания показывают, что пространство значений является, по существу, чем-то посторонним. Оставшиеся теоремы данного параграфа будут формулироваться так, чтобы подчеркнуть этот факт. Для большей четкости рассмотрим предварительно семейства подмножеств фиксированного множества X. *Разбиение* пространства X есть семейство $\mathfrak{D}$ непересекающихся подмножеств множества X, объединением которых является всё X. *Проектирование* (*фактор-отображение*) множества X на разбиение $\mathfrak{D}$ есть функция P, значением которой на x служит тот единственный элемент множества $\mathfrak{D}$, которому принадлежит точка x. Есть равносильный этому способ описания разбиения. Для заданного разбиения $\mathfrak{D}$ определим отношение R на множестве X, согласившись считать, что точка x R-связана с точкой y, тогда и только тогда, когда эти точки принадлежат одному элементу разбиения. Формально отношение R, *отвечающее разбиению* $\mathfrak{D}$, есть подмножество множества $X \times X$, образованное всеми теми парами (x, y), для которых x и y принадлежат одному элементу разбиения $\mathfrak{D}$ или, коротко, $R = \bigcup \{D \times D : D \in \mathfrak{D}\}$. Если P — проектирование множества X на $\mathfrak{D}$, то $R = \{(x, y) : P(x) = P(y)\}$. Отношение R является отношением эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно (см. главу 0). Обратно, каждое отношение эквивалентности на X определяет некоторое семейство подмножеств (имеются в виду классы эквивалентности), являющееся разбиением множества X. Если R — отношение эквивалентности на множестве X, то множество X/R определяется как семейство его классов эквивалентности. Через $R[A]$ для любого подмножества A множества X обозначается множество всех точек, R-эквивалентных точкам из A, т. е. $R[A]=\{y : (x, y) \in R$ *для некоторого* x *из* $A\}$ или, что то же самое, $R[A]= \bigcup \{D : D \in X/R$ *и* $D \cap A$ *не пусто*$\}$. Если x — точка из X, то запись $R[\{x\}]$ будет сокращаться до $R[x]$. Множество $R[x]$ — это тот класс эквивалентности, который содержит точку x. Если P — проектирование множества X на разбиение, то $P(x) = R[x]$.

Во всей оставшейся части этого параграфа мы будем предполагать, что X — некоторое фиксированное топологическое пространство, R — отношение эквивалентности на X и P — проектирование множества X на семейство X/R классов эквивалентности. Соответствующее *фактор-пространство* — это множество X/R, наделенное фактор-топологией (относительно отображения P). Если $\mathfrak{A} \subset X/R$, то $P^{-1}[\mathfrak{A}] = \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}$. Следовательно, множество $\mathfrak{A}$ открыто (замкнуто) в фактор-пространстве тогда и только тогда, когда множество $\bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\}$ открыто (соответственно замкнуто) в пространстве X.

10. Теорема. *Пусть P — проектирование топологического пространства X на фактор-пространство X/R. Тогда следующие утверждения равносильны*:

(а) *P — открытое отображение.*

(б) *Если множество A открыто в X, то и множество $R[A]$ открыто в X.*

(в) *Если множество A замкнуто в X, то и объединение всех элементов из X/R, являющихся подмножествами множества A, замкнуто в X.*

Если поменять местами слова «открытое» и «замкнутое» в формулировках утверждений (а), (б) *и* (в), *то снова получатся равносильные между собой утверждения.*

Доказательство. Покажем, прежде всего, что условие (а) эквивалентно условию (б). Для каждого подмножества A множества X пусть $R[A]=P^{-1}[P[A]]$. Если отображение P открыто и A — открытое множество, то в силу непрерывности P $P^{-1}[P[A]]$ — открытое множество. Если множество $P^{-1}[P[A]]$ открыто для любого открытого множества A, то в силу определения фактор-топологии множество $P[A]$ открыто, т. е. P — открытое отображение. Докажем эквивалентность условий (б) и (в). Заметим, что объединение всех элементов из X/R, являющихся подмножествами множества A, есть $X \setminus R[X \setminus A]$. Последнее множество замкнуто для любого замкнутого множества A в том и только в том случае, когда из того, что открыто множество $X \setminus A$, следует, что открыто множество $R[X \setminus A]$. Доказательство двойственного утверждения получается перестановкой всюду слов «открыто» и «замкнуто».

Пусть X — хаусдорфово пространство или пространство, удовлетворяющее одной из двух аксиом счетности. Естественно спросить тогда, непременно ли фактор-пространство X/R наследует эти свойства? Если не налагать жестких дополнительных ограничений, то ответ будет «нет». Например, если X — множество всех вещественных чисел с обычной топологией и R — множество всех пар (x, y), для которых разность $x - y$ является рациональным числом, то фактор-пространство X/R антидискретно, а проектирование P пространства X на пространство X/R открыто. Следовательно, открытое отображение может переводить хаусдорфово пространство в нехаусдорфово пространство. Замкнутое отображение, переводящее хаусдорфово пространство в нехаусдорфово, и замкнутое отображение, переводящее пространство с первой аксиомой счетности в пространство без нее, выглядят чуть более громоздкими, но строятся без труда (3.Т, 4.Ж). Иногда бывает полезно дополнительно предположить, что отношение R, являющееся множеством упорядоченных пар, замкнуто в произведении $X \times X$. Можно это условие переформулировать так: если x и y — не R-эквивалентные точки пространства X, то у точки (x, y) в произведении $X \times X$ есть окрестность W, не пересекающаяся с множеством R. Такая окрестность W содержит окрестность вида $U \times V$, где U и V — окрестности точек x и y соответственно. Произведение $U \times V$ не пересекается с R тогда и только тогда, когда никакая точка из U не R-эквивалентна никакой точке из V. Это значит, что множество R замкнуто в $X \times X$ тогда и только тогда, когда у любых не R-эквивалентных точек x и y из X есть окрестности U и V соответственно такие, что никакая точка множества U не R-эквивалентна никакой точке множества V или, равносильно, что никакой элемент разбиения X/R не пересекает множества U и V одновременно.

11. Теорема. *Если фактор-пространство X/R хаусдорфово, то множество R замкнуто в пространстве произведения $X\times X$.*

Если проектирование P пространства X на фактор-пространство X/R открыто и множество R замкнуто в пространстве $X\times X$, то X/R — хаусдорфово пространство.

Доказательство. Если X/R — хаусдорфово пространство и $(x, y) \notin R$, то $P(x) \neq P(y)$ и можно найти непересекающиеся открытые окрестности U для точки $P(x)$, V для точки $P(y)$. Множества $P^{-1}[U]$ и $P^{-1}[V]$ открыты, и, так как их образы при отображении P не пересекаются, никакая точка множества $P^{-1}[U]$ не R-эквивалентна никакой точке множества $P^{-1}[V]$. Значит, $P^{-1}[U]\times P^{-1}[V]$ — окрестность точки (x, y), не пересекающаяся с множеством R, т. е. R замкнуто. Первое утверждение теоремы доказано. Пусть теперь проектирование P открыто, множество R замкнуто в $X\times X$ и $P(x)$, $P(y)$ — различные элементы множества X/R. Тогда точка x не R-эквивалентна точке y и, так как множество R замкнуто, у x и y есть соответственно такие открытые окрестности U и V, что никакая точка множества U не R-эквивалентна никакой точке множества V. Следовательно, образы окрестностей U и V не пересекаются и, так как отображение P открыто, эти образы являются открытыми окрестностями точек $P(x)$ и $P(y)$ соответственно.

Замкнутые отображения довольно широко изучались под иным названием. Разбиение $\mathfrak{D}$ топологического пространства X называется *непрерывным* в том и лишь в том случае, когда для каждого D из $\mathfrak{D}$ и любого открытого множества U, содержащего множество D, существует такое открытое множество V, что $D\subset V\subset U$ и V — объединение некоторой совокупности элементов семейства $\mathfrak{D}$ (см. задачу 3.E.).

12. Теорема (П. С. Александров и Хопф [1]). *Разбиение $\mathfrak{D}$ топологического пространства X непрерывно в том и только в том случае, если проектирование P пространства X на фактор-пространство $\mathfrak{D}$ замкнуто.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 3.10 отображение P замкнуто тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества U из X объединение V тех элементов семейства $\mathfrak{D}$, которые являются подмножествами множества U, является открытым множеством. Если отображение P замкнуто, $D \in \mathfrak{D}$ и $D \subset U$, то V — искомое открытое множество. Значит, разбиение $\mathfrak{D}$ непрерывно. Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{D}$ — непрерывное разбиение и U — произвольное множество, открытое в X. Снова обозначим через V объединение всех тех элементов разбиения $\mathfrak{D}$, которые являются подмножествами множества U. Если $x \in V$, то $x \in D \subset U$ для некоторого D из $\mathfrak{D}$. В силу непрерывности разбиения $\mathfrak{D}$ найдется открытое множество W, являющееся объединением элементов семейства $\mathfrak{D}$, такое, что $D \subset W \subset U$. Тогда W — подмножество множества V и, значит, V — окрестность точки x. Множество V открыто, ибо оно является окрестностью каждой своей точки. Из теоремы 3.10 вытекает теперь, что P — замкнутое отображение.

Пусть A и B — какие-нибудь непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Можно рассмотреть тогда следующее разбиение $\mathfrak{D}$ пространства X: его элементами служат A, B и все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus (A \cup B)$. Про фактор-пространство этого разбиения часто говорят, что оно «получено в результате отождествления всех точек множества A и всех точек множества B». Очень легко проверяется, что разбиение $\mathfrak{D}$ непрерывно и что если X — хаусдорфово пространство, то множество $R = \bigcup \{D \times D : D \in \mathfrak{D}\}$ замкнуто в $X \times X$. Можно было бы предположить, что получающееся при этом простом построении фактор-пространство наследует лучшие качества пространства X. К сожалению, это неверно: X может быть хаусдорфовым пространством или пространством с первой аксиомой счетности, а полученное таким образом фактор-пространство не будет обладать этими свойствами.

13. Замечание. Понятие непрерывного разбиения было введено П. С. Александровым [9] и Мором в середине двадцатых годов. Открытые отображения впервые интенсивно исследовались Аронштайном немного позже (Аронштайн [2]). Многие результаты предшествующего параграфа можно найти в книге Уайбёрна [2]*).

ЗАДАЧИ

А. Связные пространства

Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Б. Теорема о непрерывности

Пусть A и B — такие подмножества топологического пространства X, что $X=A\cup B$ и множества $A\setminus B$ и $B\setminus A$ отделены. Тогда, если отображение f пространства X непрерывно и на множестве A, и на множестве B, то f непрерывно и на всем X (см. 1.19).

В. Упражнение на непрерывные отображения

Пусть f и g — два непрерывных отображения топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Тогда множество всех точек $x\in X$, для которых $f(x)=g(x)$, замкнуто. Следовательно, если отображения f и g согласуются на плотном подмножестве в X ($f(x)=g(x)$ для всех x из некоторого плотного подмножества в X), то $f=g$.

Г. Непрерывность в точке.
Продолжение непрерывного отображения

Пусть f — отображение, определенное на некотором подмножестве X_0 топологического пространства X со значениями в хаусдорфовом пространстве Y Скажем тогда, что отображение f непрерывно в точке x пространства X, в том и только в том случае, когда x принадлежит замыканию множества X_0 и существует точка $y\in X$, прообраз каждой окрестности которой представляется в виде пересечения множества X_0 с некоторой окрестностью точки x.

(а) Отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любых направленностей S и T, сходящихся к x, направленности $f\circ S$ и $f\circ T$ сходятся к одной и той же точке пространства Y.

(б) Обозначим через C множество всех точек, в которых отображение f непрерывно, и пусть f' — функция на C, значением которой в точке $x\in C$ служит тот элемент y области значений Y, который фигурирует в определении непрерывности в точке (точнее, график функции f' является пересеченнем множества $C\times Y$ с замыканием графика отображения f). Функция f' обладает следующим свойством: если множество U открыто в X, то $f'[U]\subset\overline{f[U]}$. Функ-

*) Теория отображений последние десять лет бурно развивалась; естественные дополнения к этой главе увеличили бы ее объем вдвое. Поэтому мы только укажем литературу; Архангельский [1], [5], [8], [9], Пономарев [1]—[7], Стоун [2]—[4], Скляренко [1]—[3], Ефимов [1], Майкл [3], [4], Лашнев [1], Пасынков [2], Морита и Ханаи [1], Хенриксен и Исбелл [1], Чобан [1], [2] и др.