позже (Аронш а йн [2]). Многие результаты предшествующего параграфа можно найти в книге Уайбёрна [2] *).

ЗАДАЧИ

А. Связные пространства

Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

Б. Теорема о непрерывности

Пусть A и B — такие подмножества топологического пространства X, что $X=A\cup B$ и множества $A\setminus B$ и $B\setminus A$ отделены. Тогда, если отображение f пространства X непрерывно и на множестве A, и на множестве B, то f непрерывно и на всем X (см. 1.19).

В. Упражнение на непрерывные отображения

Пусть f и g — два непрерывных отображения топологического пространства X в хаусдорфово топологическое пространство Y. Тогда множество всех точек $x\in X$, для которых $f(x)=g(x)$, замкнуто. Следовательно, если отображения f и g согласуются на плотном подмножестве в X ($f(x)=g(x)$ для всех x из некоторого плотного подмножества в X), то $f=g$.

Г. Непрерывность в точке. Продолжение непрерывного отображения

Пусть f — отображение, определенное на некотором подмножестве X_0 топологического пространства X со значениями в хаусдорфовом пространстве Y Скажем тогда, что отображение f непрерывно в точке x пространства X, в том и только в том случае, когда x принадлежит замыканию множества X_0 и существует точка $y\in X$, прообраз каждой окрестности которой представляется в виде пересечения множества X_0 с некоторой окрестностью точки x.

(а) Отображение f непрерывно в точке x тогда и только тогда, когда для любых направленностей S и T, сходящихся к x, направленности $f\circ S$ и $f\circ T$ сходятся к одной и той же точке пространства Y.

(б) Обозначим через C множество всех точек, в которых отображение f непрерывно, и пусть f' — функция на C, значением которой в точке $x\in C$ служит тот элемент y области значений Y, который фигурирует в определении непрерывности в точке (точнее, график функции f' является пересеченнем множества $C\times Y$ с замыканием графика отображения f). Функция f' обладает следующим свойством: если множество U открыто в X, то $f'[U]\subset\overline{f[U]}$. Функ-

*) Теория отображений последние десять лет бурно развивалась; естественные дополнения к этой главе увеличили бы ее объем вдвое. Поэтому мы только укажем литературу; Архангельский [1], [5], [8], [9], Пономарев [1]—[7], Стоун [2]—[4], Скляренко [1]—[3], Ефимов [1], Майкл [3], [4], Лашнев [1], Пасынков [2], Морита и Ханаи [1], Хенриксен и Исбелл [1], Чобан [1], [2] и др.

ция f' непрерывна, если пространство Y удовлетворяет условию: семейство всех замкнутых окрестностей произвольной точки пространства Y образует базу топологии в этой точке. (Такие топологические пространства называются *регулярными*. Отказаться здесь от требования регулярности нельзя, как показано Бурбаки и Дьедонне [1].)

Д. Упражнение на вещественные непрерывные функции

Пусть f и g — вещественные функции, заданные на некотором топологическом пространстве, непрерывные относительно обычной топологии вещественных чисел, и a — фиксированное вещественное число.

(а) Функция af, значение которой в точке x равно $af(x)$, непрерывна. (Покажите, что функция, которая переводит число r в число ar, непрерывна, и воспользуйтесь тем, что композиция непрерывных функций есть непрерывная функция.)

(б) Функция $|f|$, значение которой в точке x равно $|f(x)|$, непрерывна.

(в) Отображение $F(x)=(f(x), g(x))$ непрерывно относительно обычной топологии евклидовой плоскости. (Проверьте, что композиции отображения F с проектированиями на координатные пространства непрерывны.)

(г) Функции $f+g$, $f-g$ и $f\cdot g$ непрерывны, а если g нигде не обращается в нуль, то и $\frac{f}{g}$ — непрерывная функция. (Покажите сначала, что операции $+$, $-$ и $\cdot$ задают непрерывные отображения евклидовой плоскости в пространство вещественных чисел; см. также 3.У.)

д) Функции $\max[f, g]=\frac{1}{2}(|f+g|+|f-g|)$ и $\min[f, g]=\frac{1}{2}(|f+g|-|f-g|)$ непрерывны.

Е. Функции, полунепрерывные сверху

Вещественная функция f, определенная на топологическом пространстве X, называется *полунепрерывной сверху* тогда и только тогда, когда $\{x: f(x)\geqslant a\}$ замкнуто для любого вещественного числа a. *Верхняя* топология $\mathfrak{U}$ на множестве R вещественных чисел состоит из пустого множества, множества R и всех множеств вида $\{t: t<a\}$, где a — любой элемент R. Пусть $\{S_n, n\in D\}$ — какая-нибудь направленность вещественных чисел, тогда $\limsup\{S_n, n\in D\}$ определяется как $\lim\{\sup\{S_m, m\in D \text{ и } m\geqslant n\}, n\in D\}$, где предел берется относительно обычной топологии вещественных чисел.

(а) Направленность $\{S_n, n\in D\}$ вещественных чисел сходится к точке s относительно топологии $\mathfrak{U}$ в том и лишь в том случае, когда $\limsup\{S_n, n\in D\}\leqslant s$.

(б) Вещественная функция f на X полунепрерывна сверху тогда и только тогда, когда отображение f непрерывно относительно верхней топологии $\mathfrak{U}$, а это будет тогда и только тогда, когда $\limsup\{f(x_n), n\in D\}\leqslant f(x)$ для любой направленности $\{x_n, n\in D\}$, сходящейся в X к точке x.

(в) Если функции f и g полунепрерывны сверху, а t — какое угодно неотрицательное вещественное число, то функция $f+g$ и функция tf полунепрерывны сверху.

(г) Пусть F — такое семейство полунепрерывных сверху функций, что $i(x)=\inf\{f(x):f\in F\}$ существует для каждого x из X. Тогда $i(x)$ — полунепрерывная сверху функция. (Заметьте, что $\{x:i(x)\geqslant a\}=\bigcap\{\{x:f(x)\geqslant a\}:f\in F\}$.)

(д) Для любой ограниченной вещественной функции f на X существует наименьшая полунепрерывная сверху функция f^- такая, что $f^-\geqslant f$. Пусть $\mathfrak{V}$ — семейство всех окрестностей точки x и $S_V=\sup\{f(y):y\in V\}$, тогда $f^-(x)=\lim\{S_V,\ V\in\mathfrak{V},\ \subset\}$.

(е) Вещественная функция g называется *полунепрерывной снизу* тогда и только тогда, когда функция $-g$ полунепрерывна сверху. Для ограниченной вещественной функции f положим $f_-=-(-f)^-$ и определим *колебание* Q_f функции f так: $Q_f(x)=f^-(x)-f_-(x)$ для всех x из X. Функция Q_f полунепрерывна сверху, и функция f непрерывна тогда и только тогда, когда $Q_f(x)=0$ для всех x из X.

(ж) Пусть f — неотрицательная вещественная функция на X, R — пространство вещественных чисел с обычной топологией и множество $G=\{(x,t):0\leqslant t\leqslant f(x)\}$ имеет топологию, индуцированную топологией произведения пространств $X\times R$. Обозначим через $\mathfrak{D}$ разбиение пространства G на «вертикальные слои», т. е. на множества вида $(\{x\}\times R)\cap G$. Если разбиение $\mathfrak{D}$ непрерывно, то функция f полунепрерывна сверху. (Обратное утверждение тоже верно, но самое простое его доказательство опирается на теорему 5.12.)

Ж. Упражнение на топологическую эквивалентность

(а) Любые два открытых интервала вещественных чисел с топологией, индуцированной обычной топологией вещественных чисел, гомеоморфны.

(б) Два любых замкнутых интервала гомеоморфны, и каждый полуоткрытый интервал гомеоморфен любому другому полуоткрытому интервалу.

(в) Никакой открытый интервал не гомеоморфен никакому замкнутому и никакому полуоткрытому интервалу, и никакой замкнутый интервал не гомеоморфен никакому полуоткрытому интервалу.

(г) Подпространство $\{(x,y):x^2+y^2=1\}$ евклидовой плоскости не гомеоморфно никакому подпространству пространства вещественных чисел.

(У одних из предшествующих пространств есть лишь единственная точка, дополнение до которой связно, у других таких точек больше, а у третьих их нет.)

З. Гомеоморфизмы и взаимно однозначные непрерывные отображения

Если каждое из топологических пространств X и Y можно взаимно однозначно и непрерывно отобразить на другое, то пространства X и Y могут быть все же не гомеоморфны. Пусть X — пространство, образованное счетным семейством попарно непересекающихся полуоткрытых интервалов и счетным множеством *изолированных* точек (т. е. таких точек x, что $\{x\}$ — открытое множество в X). Рассмотрим, кроме того, пространство Y, состоящее из счетного семейства открытых интервалов и счетного множества изолированных точек. Заметим, что объединение счетного семейства полуоткрытых интервалов можно непрерывно и взаимно однозначно отобразить на открытый интервал. По-видимому, этот пример принадлежит Фоксу.

И. Непрерывность по каждой из двух переменных

Пусть X и Y — топологические пространства, $X\times Y$ — их произведение и f — отображение пространства $X\times Y$ в некоторое третье топологическое пространство. Говорят, что отображение f *непрерывно по* x, тогда и только тогда, когда для каждого $y\in Y$ функция $f(\ ,y)$, значение которой в точке x равно $f(x,y)$, непрерывна. Аналогично отображение $f(x,y)$ непрерывно по y в том и лишь в том случае, когда для каждого $x\in X$ функция $f(x,\ )$, определенная условием $f(x,\ )(y)=f(x,y)$, непрерывна. Функция f, непрерывная на произведении, непрерывна и по каждой переменной; однако обратное не верно. (Классический пример — вещественная функция f, определенная на евклидовой плоскости следующим образом: $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ и $f(0,0)=0$.)

К. Упражнение на евклидово n-пространство

Подмножество A евклидова n-пространства E^n называется *выпуклым* тогда и только тогда, когда для каждой пары x и y точек множества A и каждого вещественного числа t, удовлетворяющего условию $0\leqslant t\leqslant 1$, точка $tx+(1-t)y$ принадлежит множеству A. (Мы полагаем $(tx+(1-t)y)_i=tx_i+(1-t)y_i$.) Любые два открытых выпуклых подмножества пространства E^n гомеоморфны. Что можно сказать о его замкнутых выпуклых подмножествах?

Л. Упражнение на замыкание, внутренность и границу в произведении

Пусть X и Y — топологические пространства и $X\times Y$ — их произведение. Границу произвольного множества C условимся обозначать через C^b. Пусть A и B — подмножества пространств X и Y соответственно; тогда:

(а) $(\overline{A\times B})=\overline{A}\times\overline{B}$,

(б) $(A\times B)^0=A^0\times B^0$ и

(в) $(A\times B)^b=(\overline{A\times B})\setminus(A\times B)^0=((A^b\cup A^0)\times$
$\times(B^b\cup B^0))\setminus(A^0\times B^0)=(A^b\times B^b)\cup(A^b\times B^0)\cup(A^0\times B^b)=$
$=(A^b\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times B^b)$.

М. Упражнение на топологию произведения

Пусть для каждого элемента множества индексов A задано некоторое топологическое пространство X_a. Пусть B и C — непересекающиеся подмножества множества A такие, что $A=B\cup C$. Тогда пространство произведения $\Pi\{X_b : b \in B\} \times \Pi\{X_c : c \in C\}$ гомеоморфно пространству произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$. Для произвольно фиксированного топологического пространства X произведение X^A гомеоморфно произведению $X^B \times X^C$, и произведение $(X^B)^C$ гомеоморфно произведению $X^{B\times C}$, где все пространства берутся с топологией произведения.

Н. Произведение пространств со счетной базой

Топология произведения обладает счетной базой в том и только в том случае, когда топология каждого координатного пространства имеет счетную базу и все координатные пространства, кроме счетного множества, антидискретны.

О. Пример на произведения и сепарабельность

Пусть Q — замкнутый единичный интервал и X — пространство произведения Q^Q. Обозначим через A подмножество пространства X, образованное характеристическими функциями точек. Точнее, $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x(q) = 1$ для некоторого q из Q и на $Q \setminus \{q\}$ функция x обращается в нуль.

(а) Пространство X сепарабельно. (Множество всех x из X с конечной областью значений (их иногда называют ступенчатыми функциями) плотно в X. Некоторое счетное подмножество этого множества тоже плотно в X *).)

(б) Множество A с индуцированной топологией дискретно и несепарабельно.

(в) У множества A есть только одна предельная точка x в пространстве X, причем для любой окрестности U точки x множество $A \setminus U$ конечно.

П. Произведение связных пространств

Произведение произвольного семейства связных топологических пространств связно. (Зафиксируем в произведении точку x, и пусть A — множество всех точек y, для которых существует связное множество, содержащее x и y одновременно. Покажите, что A плотно в произведении.)

Р. Упражнение на T_1-пространства

Произведение T_1-пространств является T_1-пространством. Если $\mathfrak{D}$ — разбиение топологического пространства, то фактор-пространство является T_1-пространством в том и только в том случае, когда все элементы разбиения $\mathfrak{D}$ замкнуты.

С. Упражнение на фактор-пространства

Проектирование топологического пространства X на фактор-пространство X/R является замкнутым отображением тогда и толь-

---

*) Плотно в X, например, множество тех ступенчатых функций, каждая ступенька которых лежит на рациональной высоте над рациональным интервалом. Оно счетно. *(Прим. перев.)*

ко тогда, когда для каждого подмножества A множества X имеем $\overline{R[A]} \subset R[\overline{A}]$. Проектирование является открытым отображением в том и лишь в том случае, когда $R[A^0] \subset R[A]^0$ для каждого подмножества A. ($^-$ и ^{0} — это операторы замыкания и перехода к внутренности, соответственно.)

Т. Пример на фактор-пространства и диагональные последовательности

Пусть X — евклидова плоскость с обычной топологией и A — множество всех точек (x, y), для которых $y=0$. Рассмотрим разбиение $\mathfrak{D}$, элементами которого являются множество A и все одноточечные множества $\{(x, y)\}$, где $(x, y) \notin A$.

Множество $\mathfrak{D}$, наделенное фактор-топологией, обладает следующими свойствами:

(а) Проектирование X на фактор-пространство замкнуто.

(б) Существует счетное семейство окрестностей элемента $\{A\}$, пересечение которых есть $\{A\}$.

(в) Для каждого неотрицательного целого числа m последовательность $\left\{\left(m, \frac{1}{n+1}\right), n \in \omega\right\}$ сходится в фактор-пространстве к элементу A. Если $\{N_n, n \in \omega\}$ — какая-либо подпоследовательность последовательности $\{n, n \in \omega\}$, то последовательность $\left\{\left(n, \frac{1}{N_n+1}\right), n \in \omega\right\}$ не сходится к элементу A. (Последнюю последовательность можно было бы назвать диагональю исходного семейства последовательностей.)

(г) Построенное фактор-пространство не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Замечание. Этот пример принадлежит Новосаду.

У. Топологические группы

Тройка $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ называется *топологической группой* тогда и только тогда, когда $(G, \cdot)$ — группа, $(G, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство и отображение, значение которого на элементе (x, y) пространства $G \times G$ равно $x \cdot y^{-1}$, непрерывно относительно топологии произведения на $G \times G$. Когда недоразумения маловероятны, мы не будем указывать в обозначениях ни групповую операцию, ни топологию $\mathfrak{J}$; просто будем говорить, что «G является топологической группой». Пусть X и Y — подмножества множества G; тогда $X \cdot Y$ — множество всех таких элементов $z \in G$, что $z = x \cdot y$ для некоторого $x \in X$ и некоторого $y \in Y$. В случаях, когда x — элемент множества G, записи $\{x\} \cdot Y$ и $Y \cdot \{x\}$ будут сокращаться соответственно до $x \cdot Y$ и $Y \cdot x$. Множество Y^{-1} определяется как $\{x : x^{-1} \in Y\}$.

(а) Пусть X, Y и Z — подмножества множества G, тогда $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ и $(X \cdot Y)^{-1} = Y^{-1} \cdot X^{-1}$.

(б) Пусть $(G, \cdot)$ — группа и $\mathfrak{J}$ — некоторая топология на множестве G. Тогда $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — топологическая группа тогда и только тогда, когда для любых точек x и y из G и произвольной окрестности W точки $x \cdot y^{-1}$ найдутся окрестность U точки x и окрестность V точки y такие, что $U \cdot V^{-1} \subset W$. Равносильное условие: $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — топологическая группа тогда и только тогда, когда непрерывны отображения i и m, где $i(x) = x^{-1}$ и $m(x, y) = x \cdot y$.

(в) Пусть G — топологическая группа. Тогда отображение i, описываемое формулой $i(x) = x^{-1}$, является гомеоморфизмом пространства G на себя. Гомеоморфизмами являются также отображение L_a и отображение R_a, называемые *левым и правым переносами* и определяемые формулами $L_a(x) = a \cdot x$ и $R_a(x) = x \cdot a$, где a — произвольный фиксированный элемент группы G.

Очень важное обстоятельство: топология топологической группы однозначно определяется системой окрестностей какого-либо элемента группы. Этот факт (точно он формулируется ниже) позволяет «локализовать» многие понятия.

(г) Пусть G — топологическая группа и $\mathfrak{U}$ — система всех окрестностей ее единичного элемента. Тогда множество $A \subset G$ открыто в том и только в том случае, когда $x^{-1} \cdot A \in \mathfrak{U}$ для каждого x из A или, что эквивалентно, если $A \cdot x^{-1} \in \mathfrak{U}$ для каждого x из A. Замыканием множества A является множество $\bigcap \{U \cdot A : U \in \mathfrak{U}\} = \bigcap \{A \cdot U : U \in \mathfrak{U}\}$. (Заметьте, что $x \in U \cdot A$ тогда и только тогда, когда множество $(U^{-1} \cdot x) \cap A$ не пусто.)

(д) Семейство $\mathfrak{U}$ окрестностей единицы e произвольной топологической группы обладает следующими свойствами:

1) если U и V принадлежат $\mathfrak{U}$, то $U \cap V \in \mathfrak{U}$;

2) если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset V$, то $V \in \mathfrak{U}$;

3) если $U \in \mathfrak{U}$, то для некоторого $V \in \mathfrak{U}$ имеем $V \cdot V^{-1} \subset U$ и

4) для каждого U из $\mathfrak{U}$ и каждого x из G выполняется $x \cdot U \cdot x^{-1} \in \mathfrak{U}$.

Обратно, если заданы группа G и семейство $\mathfrak{U}$ ее непустых подмножеств, удовлетворяющее перечисленным выше четырем условиям, то на G существует единственная топология $\mathfrak{J}$ такая, что тройка $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ является топологической группой, а семейство $\mathfrak{U}$ — системой всех окрестностей единичного элемента группы G в этой топологии.

(е) Каждая группа вместе с дискретной топологией или вместе с антидискретной топологией является топологической группой.

Пусть G — множество вещественных чисел, тогда $(G, +, \mathfrak{J})$, где $\mathfrak{J}$ — обычная топология, будет топологической группой, и $(G \setminus \{0\}, \cdot, \mathfrak{J})$ тоже является топологической группой. Пусть G — множество всех целых чисел, p — некоторое простое число и $\mathfrak{U}$ — семейство всех таких подмножеств U множества G, что для некоторого положительного целого числа k каждое целое кратное числа p^k принадлежит U. Тогда $\mathfrak{U}$ — система окрестностей элемента 0 в некоторой топологии $\mathfrak{J}$, относительно которой $(G, +, \mathfrak{J})$ является топологической группой.

(ж) Топологическая группа является хаусдорфовым пространством, коль скоро ее топология удовлетворяет T_0-аксиоме отделимости. (То есть для любых двух различных точек x и y по крайней мере у одной из них найдется окрестность, не содержащая другой. Заметьте, что если $x \notin U \cdot y$, то $x \cdot y^{-1} \notin U$, и если, кроме того, $V^{-1} \cdot V \subset U$, то множество $V \cdot x \cap V \cdot y$ пусто.)

(з) Если U — открытое, а X — произвольное подмножество топологической группы, то $U \cdot X$ и $X \cdot U$ — открытые множества. Однако может случиться, что множества X и Y замкнуты, а множество $X \cdot Y$ не замкнуто. (Рассмотрите евклидову плоскость с обычным сложением, и пусть $X = Y = \left\{ (x, y) : y = \frac{1}{x^2} \right\}$.)

(и) Декартово произведение $\Pi\{G_a : a \in A\}$ групп является группой относительно следующей операции: $(x \cdot y)_a = x_a \cdot y_a$ для каждого a из A. Если декартово произведение групп наделить топологией произведения, то оно становится топологической группой. Проектирования на координатные пространства превращаются при этом в непрерывные открытые гомоморфизмы *).

Замечание. Понтрягин [1], Бурбаки [1] и Вейль [2] — основные учебники по теории топологических групп; см. также Шевалле [1].

Ф. Подгруппы топологической группы

(а) Если наделить подгруппу топологической группы индуцированной топологией, то получится топологическая группа.

(б) Замыкание подгруппы является подгруппой, а замыкание инвариантной подгруппы (т. е. нормального делителя) является инвариантной подгруппой.

(в) Каждая подгруппа, внутренность которой не пуста, открыта и замкнута одновременно. Произвольная подгруппа H либо замкнута, либо множество $\overline{H} \setminus H$ плотно в $\overline{H}$.

(г) Наименьшая подгруппа, содержащая фиксированное открытое подмножество топологической группы, образует открыто-замкнутое множество.

(д) Компонента единицы топологической группы является нормальным делителем.

(е) Каждая дискретная (в индуцированной топологии) нормальная подгруппа **) связной топологической группы содержится в ее центре. (Рассмотрите для фиксированного элемента h заданной дискретной подгруппы H отображение группы G в H, которое переводит x в $x^{-1} \cdot h \cdot x$.)

Х. Фактор-группы и гомоморфизмы

Пусть G — топологическая группа, H — ее подгруппа и G/H — семейство левых классов смежности группы G по подгруппе H (т. е. семейство всех множеств, представимых в виде $x \cdot H$ для

---

*) Некоторые авторы пользуются для обозначения непрерывного гомоморфизма термином «представление», оставляя название «гомоморфизм» за теми непрерывными гомоморфизмами, которые являются открытыми отображениями на область значений.

**) Нормальная подгруппа и нормальный делитель — равносильные выражения. (*Прим. перев.*)

некоторого $x \in G$). Множество G/H, наделенное фактор-топологией, есть *однородное пространство*. Если H — нормальный делитель, то G/H — группа, называемая фактор-группой группы G.

(а) Проектирование топологической группы G на однородное фактор-пространство G/H открыто и непрерывно. (Покажите, что объединение всех левых классов смежности, пересекающих фиксированное открытое множество U, есть $U \cdot H$, и примените утверждение 3.10.)

(б) Если H — нормальный делитель, то группа G/H, наделенная фактор-топологией, является топологической группой. При этом проектирование является непрерывным открытым гомоморфизмом.

(в) Отображение однородного пространства, при котором элемент A переходит в элемент $a \cdot A$, где a — фиксированный элемент группы G, является гомеоморфизмом.

(г) Пусть f — гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу H. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз произвольной окрестности единичного элемента группы H является окрестностью единичного элемента группы G.

(д) Пусть f — непрерывный гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу J. Тогда отображение группы G на группу $f[G]$, наделенную фактор-топологией, является непрерывным открытым гомоморфизмом, а тождественное отображение множества $f[G]$, взятого с фактор-топологией, в топологическую группу J непрерывно. Таким образом, каждый непрерывный гомоморфизм можно «профакторизовать», представив его в виде композиции некоторого непрерывного открытого гомоморфизма с последующим непрерывным взаимно однозначным гомоморфизмом. Если f — непрерывный открытый гомоморфизм группы G на группу J, то J топологически изоморфна топологической группе G/K, где K — ядро гомоморфизма f.

(е) Если $J \subset H \subset G$, J и H — нормальные делители группы G, то H/J является подгруппой группы G/J, причем фактор-топология группы H/J совпадает с топологией, индуцированной на ней фактор-топологией группы G/J, а отображение группы G/J в группу G/H, при котором элемент A переходит в элемент $A \cdot H$, непрерывно и открыто. Таким образом, группа $(G/J)/(H/J)$ топологически изоморфна группе G/H.

Ц. *Ящичные пространства*

Базой *ящичной* топологии декартова произведения $\prod \{X_a : a \in A\}$ служит семейство всех множеств вида $\prod \{U_a : a \in A\}$, где U_a для каждого a из A — некоторое открытое подмножество пространства X_a. Таким образом, декартово произведение открытых множеств в ящичной топологии всегда открыто.

(а) Проектирование в любое из координатных пространств является непрерывным и открытым отображением в ящичной топологии.

(б) Пусть Y — декартово произведение бесконечного семейства экземпляров пространства вещественных чисел, т. е. $Y = R^A$, где R —

пространство вещественных чисел, а A — бесконечное множество. Пространство Y, наделенное ящичной топологией, не удовлетворяет первой аксиоме счетности, а компонента пространства Y, содержащая точку y, — это множество всех точек x, для которых множество $\{a : x_a \neq y_a\}$ конечно. (Предположим, что координаты точек x и y пространства Y отличаются на бесконечном множестве $a_0, a_1, \ldots, a_p, \ldots$ элементов из A. Обозначим через Z множество всех $z \in Y$ таких, что для некоторого k $\frac{p\,|z(a_p) - x(a_p)|}{|x(a_p) - y(a_p)|} < k$ для всех p. Тогда Z — открыто-замкнутое множество, причем $x \in Z$ и $y \notin Z$.)

(в) Докажите утверждения (б) для случая произведения бесконечного числа связных хаусдорфовых топологических групп, каждая из которых содержит по крайней мере два различных элемента. Покажите сначала, что произведение топологических групп, наделенное ящичной топологией, является топологической группой.

Ч. Функционалы на вещественных линейных пространствах

Пусть $(X, +, \cdot)$ — вещественное линейное пространство. Вещественнозначная линейная функция, определенная на X, называется *линейным функционалом*. Множество Z всех линейных функционалов на X при естественном определении сложения и умножения на число становится вещественным линейным пространством. Ясно, что Z — подмножество произведения $R^X = \prod\{R : x \in X\}$, где R — пространство вещественных чисел. Топология, индуцированная на Z топологией произведения, называется *слабой* топологией, или w^*-топологией (*простая* топология). (Пространство Z является подгруппой группы R^X, которая в силу утверждения (и) задачи 3. У является топологической группой. Однако при доказательстве нижеследующих результатов выписанные выше утверждения о топологических группах нам не понадобятся.)

Ниже характеризуются w^*-плотные подпространства пространства Z и w^*-непрерывные линейные функционалы.

(а) Если $f, g_1, \ldots, g_n$ — элементы пространства Z и $f(x) = 0$, коль скоро $g_i(x) = 0$ при каждом i, то найдутся вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что $f = \sum\{a_i g_i : i = 1, \ldots, n\}$. (Рассмотрите отображение G пространства X в евклидово пространство E^n, определенное формулой $(G(x))_i = g_i(x)$. Покажите, что тогда существует некоторое отображение F (см. главу 0), для которого $f = F \circ G$.)

(б) Лемма о плотности. *Пусть Y — такое линейное подпространство пространства Z, что для каждого ненулевого элемента $x \in X$ существует функционал $g \in Y$ такой, что $g(x) \neq 0$. Тогда пространство Y w^*-плотно в Z.* (Чтобы установить, что $f \in \overline{Y}$, необходимо для каждого конечного подмножества $x_1, \ldots, x_n$ элементов пространства X научиться находить элемент пространства X, который приближает f в каждой из точек $x_1, \ldots, x_n$. Покажите, что существует такой функционал $g \in Y$, что $g(x_i)=f(x_i)$ при каждом $i=1, 2, \ldots, n$.)

в) Теорема о значении. *Линейный функционал F на Z w^*-непрерывен тогда и только тогда, когда он представляет собой значение, т. е. когда для некоторого x из X имеем $F(g)=g(x)$ при всех g из Z.* (Если функционал F w^*-непрерывен, то существуют набор $x_1, \ldots, x_n$ элементов пространства X и набор положительных вещественных чисел $r_1, \ldots, r_n$, для которых из того, что $|g(x_i)|<r_i$ при каждом i, следует, что $|F(g)|<1$. Покажите, что тогда, если $g(x_i)=0$ при каждом i, то $F(g)=0$.)

Замечания. Понятие топологии произведения выросло на почве изучения сходимости последовательностей относительно ω^*-топологии. Эта последняя исследовалась очень широко (см., например, книгу Банаха [1]). В процессе этого изучения выявился ряд несуразностей, прояснившихся после развития топологического подхода. Можно было бы определить секвенциальное замыкание множества как объединение этого множества и множества пределов всевозможных сходящихся последовательностей элементов исходного множества и согласиться затем считать множество секвенциально замкнутым в том и только в том случае, когда оно совпадает со своим секвенциальным замыканием. Нетрудно убедиться тогда, что множество может быть секвенциально замкнутым по отношению к w^*-топологии, не будучи w^*-замкнуто. Это не является серьезным препятствием, если мы изучаем именно сходимость последовательностей. По-настоящему опечаливает, однако, тот факт, что секвенциальное замыкание множества может не быть секвенциально замкнутым, т. е. оператор секвенциального замыкания не является оператором замыкания Куратовского. Из-за этого техника общей топологии непригодна для изучения оператора секвенциального замыкания, и для каждого заключения необходимы дополнительные аргументы. См. книгу Банаха [1], стр. 208, где дается дальнейшее обсуждение предмета и приводятся примеры.

Ш. Вещественные линейные топологические пространства

Вещественное линейное топологическое пространство (в. л. т. п.) — это четверка $(X, +, \cdot, \mathfrak{J})$, где $(X, +, \cdot)$ — вещественное линейное пространство, $(X, +, \mathfrak{J})$ — топологическая группа, и умножение на число — операция $\cdot$ — является непрерывным отображением пространства произведения $X \times$ (*пространство вещественных чисел*) в X. Напомним, что подмножество K вещественного линейного пространства называется выпуклым тогда и только тогда, когда $tx+(1-t)y \in K$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и любых двух элементов $x, y \in K$.

(а) Пусть a — некоторое отличное от нуля фиксированное вещественное число. Отображение, которое переводит произвольный элемент x вещественного линейного топологического пространства в элемент $a \cdot x$, является гомеоморфизмом.

(б) Декартово произведение вещественных линейных топологических пространств, наделенное топологией произведения, является вещественным линейным топологическим пространством по отношению к покоординатному сложению и покоординатному умножению на число.

(в) Пусть Y — линейное подпространство в. л. т. п. X; если наделить Y индуцированной топологией, то оно само станет в. л. т. п.; X/Y вместе с фактор-топологией тоже есть в. л. т. п.

(г) Пусть K — выпуклое подмножество вещественного линейного топологического пространства X и f — линейный функционал на X. Функционал f непрерывен на K тогда и только тогда, когда для каждого вещественного числа t множество $f^{-1}[t]\cap K$ замкнуто в K. (Пусть $\{x_n, n\in D\}$ — направленность в K, сходящаяся к некоторому элементу x из K, такая, что направленность $\{f(x_n), n\in D\}$ не сходится к $f(x)$. Тогда для каждого n из некоторого конфинального подмножества множества D можно так выбрать y_n, чтобы $f(y_n)$ было константой, не зависящей от n и отличной от $f(x)$.

(д) Вещественная линейная функция f (т. е. линейный функционал) на в. л. т. п. X непрерывна в том и лишь в том случае, когда множество $\{x : f(x)=0\}$ замкнуто.

Замечания. Понятие линейного топологического пространства определено сравнительно недавно (Колмогоров [1] и Нейман [1]). Оно выросло на почве изучения слабой топологии на банаховом пространстве и слабой топологии на сопряженном к нему пространстве. Значительная часть элементарной теории линейных топологических пространств получается непосредственным применением теории топологических групп. Все результаты теории, отличающие ее от теории топологических групп, связаны с понятием выпуклости. (Это совершенно естественно, ибо умножение на числа, — а наличие такого умножения и есть то единственное, что отличает в. л. т. п. от топологических групп, — применяется исключительно в рассуждениях, касающихся выпуклости.)

Немногие результаты теории вещественных линейных топологических пространств, изложенные в виде задач в этой книге, не образуют удовлетворительного введения в эту теорию, ибо нами не включены утверждения о выпуклости, существенные для серьезного изучения. Для дальнейшего чтения мы рекомендуем обратиться к книгам: Бурбаки [3], Нахбин [1] и Накано [1]. В первой из них изучаются линейные топологические пространства над топологическим (не обязательно коммутативным) полем.