Глава 4

ВЛОЖЕНИЯ И МЕТРИЗАЦИЯ

Путь, по которому эволюционировала общая топология, во многом характерен для математики. Сначала замечается сходство некоторых ситуаций, аналогии и повторения в рассуждениях. Затем предпринимаются попытки выделить понятия и методы, общие для различных примеров; при условии, что анализ достаточно глубок, есть надежда найти теорию, которая охватывает многие или даже все наши примеры и достойна самостоятельного изучения. Именно на этом пути после длительного экспериментирования было получено понятие топологического пространства. Оно — естественный продукт непрерывного процесса консолидации, абстрагирования и обобщения. Чтобы избежать формализма в обобщении, каждую возникающую таким образом абстракцию следует испытать с целью выяснения, действительно ли центральные идеи воплощены в ней. Это испытание обычно заключается в сравнении абстрактно построенного объекта с объектами, от которых он произошел. В рассматриваемом нами случае естественно стремиться выяснить, будет ли топологическое пространство — по крайней мере при некоторых разумных дополнительных предположениях о нем — гомеоморфно одному из тех специальных конкретных пространств, от которых произошло понятие топологического пространства. «Стандартные» пространства, с которыми естественно сравнивать все прочие, — это декартовы произведения единичных интервалов и метрические пространства. В этой главе выясняются элементарные свойства метрических и псевдометрических пространств и даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство было копией метрического пространства. Характеризуются также подпространства декартова произведения интервалов.

Предостережение: топологические пространства вовсе не обладают всеми свойствами метрических пространств. В главе 6 описывается другое, более тонкое обобщение метрических пространств.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе мы докажем четыре леммы. Все они касаются построения непрерывных вещественных функций на топологических пространствах. Пространство называется нормальным тогда и только тогда, когда для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $B \subset V$. *T_4-пространство* — это нормальное T_1-пространство (множество $\{x\}$ замкнуто при каждом x). Если согласиться называть множество U *окрестностью множества* A в том и только в том случае, когда A содержится во внутренности U^0 множества U, то определение нормальности можно переформулировать так: пространство нормально тогда и только тогда, когда любые его непересекающиеся замкнутые подмножества обладают непересекающимися окрестностями. Есть еще одна удачная переформулировка определения нормальности. Семейство окрестностей множества называется *базой системы окрестностей* этого множества в том и лишь в том случае, когда каждая окрестность последнего содержит некоторую окрестность из нашего семейства. Пусть W — произвольная окрестность замкнутого подмножества A нормального пространства. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $A \subset U$ и $X \setminus W^0 \subset V$. Таким образом, каждая окрестность W замкнутого множества A содержит некоторую его замкнутую окрестность $\bar{U}$. Следовательно, семейство всевозможных замкнутых окрестностей замкнутого множества A является базой системы окрестностей множества A, если пространство нормально. Обратное тоже верно, ибо если A и B — непересекающиеся замкнутые множества и W — замкнутая окрестность множества A, содержащаяся в множестве $X \setminus B$, то W^0 и $X \setminus W$ — непересекающиеся открытые окрестности множеств A и B соответственно.

Все дискретные пространства и все антидискретные пространства нормальны. Таким образом, не каждое нормальное пространство хаусдорфово и не каждое нормальное пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности (а также и первой). Однако T_4-пространство (T_1 и нормальное) непременно является хаусдорфовым пространством. Замкнутое подмножество нормального пространства, наделенное индуцированной топологией, нормально. Однако подпространства, произведения и фактор-пространства нормальных пространств могут не быть нормальными пространствами (см. 4Д, 4Е).

Есть условие, занимающее в случае T_1-пространств промежуточное положение по отношению к требованиям хаусдорфовости и нормальности. Топологическое пространство называется *регулярным* тогда и только тогда, когда для каждой его точки x и любой окрестности U этой точки существует замкнутая окрестность V точки x, содержащаяся в U. Иными словами, семейство замкнутых окрестностей произвольной точки должно быть базой топологии в этой точке. Равносильное условие: для каждой точки x и каждого замкнутого множества A, не содержащего этой точки, можно найти непересекающиеся открытые множества U и V такие, что $x \in U$ и $A \subset V$. Регулярное пространство, одновременно являющееся T_1-пространством, называется *T_3-пространством*. Напоминаем, что линделёфовым называется топологическое пространство, из каждого открытого покрытия которого можно выбрать счетное подпокрытие.

1. Лемма (Тихонов). *Каждое регулярное линделёфово пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — произвольные замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X. В силу регулярности X у каждой точки множества A найдется окрестность, замыкание которой не пересекается с множеством B. Следовательно, семейство $\mathfrak{U}$ всех открытых множеств, замыкания которых не пересекают множества B, покрывает множество A. Аналогично семейство $\mathfrak{V}$ всех открытых множеств, замыкания которых не пересекают множества A, покрывает множество B. Поэтому $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V} \cup \{X \setminus (A \cup B)\}$ — покрытие пространства X. Существует последовательность $\{U_n,\ n \in \omega\}$ элементов семейства $\mathfrak{U}$, покрывающая A, и последовательность $\{V_n,\ n \in \omega\}$ элементов семейства $\mathfrak{V}$, покрывающая B. Положим $U'_n = U_n \setminus \bigcup \{\overline{V}_p : p \leqslant n\}$ и $V'_n = V_n \setminus \bigcup \{\overline{U}_p : p \leqslant n\}$. Так как $U'_n \cap V_m$ пусто при $m \leqslant n$, то и $U'_n \cap V'_m$ пусто при $m \leqslant n$. Поменяв ролями множества U и V и повторив наше рассуждение, получим, что множество $U'_n \cap V'_m$ пусто при всех m и n. Следовательно, множества $\bigcup \{U'_n : n \in \omega\}$ и $\bigcup \{V'_n : n \in \omega\}$ не пересекаются. Наконец, множества $\overline{V}_p \cap A$ и $\overline{U}_p \cap B$ пусты для всех p. Значит, открытые непересекающиеся множества $\bigcup \{U'_n : n \in \omega\}$ и $\bigcup \{V'_n : n \in \omega\}$ содержат A и B соответственно.

В частности, регулярное топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, непременно нормально.

Приступим теперь к построению некоторых непрерывных вещественных функций. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые множества. Мы хотим построить непрерывную вещественную функцию, равную нулю на A и единице на B, все значения которой принадлежат замкнутому интервалу $[0,1]$. Вместо того чтобы строить функцию непосредственно, мы опишем множества, соответствующие (приближенно) множествам вида $\{x : f(x) < t\}$. Следующие ниже две леммы выясняют связь между некоторыми семействами подмножеств и некоторыми вещественными функциями.

2. Лемма. *Пусть для каждого элемента t некоторого всюду плотного подмножества D множества положительных вещественных чисел задано некоторое подмножество F_t множества X такое, что:*

(а) *если $t < s$, то $F_t \subset F_s$;*

(б) $\bigcup \{F_t : t \in D\} = X$.

Для каждого x из X положим $f(x) = \inf\{t : x \in F_t\}$. Тогда $\{x : f(x) < s\} = \bigcup \{F_t : t \in D$ и $t < s\}$ и $\{x : f(x) \leqslant s\} = \bigcap \{F_t : t \in D$ и $t > s\}$ для каждого вещественного числа s.

Доказательство. Проводится непосредственное вычисление. Имеем $\{x : f(x) < s\} = \{x : \inf \{t : x \in F(t)\} < s\}$, и так как стоящая в скобках наибольшая нижняя грань меньше s тогда и только тогда, когда некоторый элемент множества $\{t : x \in F_t\}$ меньше s, то множество $\{x : f(x) < s\}$ состоит из всех таких x, что $t < s$ и $x \in F_t$ для некоторого t, т. е. совпадает с множеством $\bigcup \{F_t : t \in D$ *и* $t < s\}$. Этим доказано первое равенство. Докажем второе. Заметим, что $\inf \{t : x \in F_t\} \leqslant s$, если для каждого u, большего s, найдется такое $t < u$, что $x \in F_t$. Обратно, если для каждого t из D, большего s, $x \in F_t$, то $\inf \{t : x \in F_t\} \leqslant \leqslant s$, ибо D плотно в множестве вещественных чисел. Следовательно, множество всех x, для которых $f(x) = \inf\{t : x \in F_t\} \leqslant s$, есть $\{x$: *если* $t \in D$ *и* $t > s$, *то* $x \in F_t\} = \bigcap \{F_t : t \in D$ *и* $t > s\}$.

3. Лемма. *Пусть для каждого элемента t некоторого всюду плотного подмножества D множества положительных вещественных чисел задано открытое подмножество F_t топологического пространства X такое, что выполняются условия*:

(а) *если $t < s$, то замыкание множества F_t содержится в множестве F_s*;

(б) $\bigcup \{F_t : t \in D\} = X$.

Тогда функция f, определенная формулой $f(x) = \inf \{t : x \in F_t\}$, непрерывна.

Доказательство. В соответствии с теоремой 3.1 функция непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз каждого элемента некоторой предбазы топологии пространства значений открыт. Семейство всех множеств вида $\{t : t < s\}$ и $\{t : t > s\}$, где s — произвольное вещественное число, является предбазой обычной топологии пространства вещественных чисел. Следовательно, для доказательства непрерывности функции f достаточно установить, что множество $\{x : f(x) < s\}$ открыто, а множество $\{x : f(x) \leqslant s\}$ замкнуто при любом вещественном s. В силу предыдущей леммы первое из этих множеств, $\{x : f(x) < s\}$, является объединением открытых множеств F_t и потому открыто. Снова в силу предыдущей леммы $\{x : f(x) \leqslant s\} = \bigcap \{F_t : t \in D$ *и* $t > s\}$. Доказательство леммы 3 будет завершено, если мы покажем, что последнее множество совпадает с множеством $\bigcap \{\bar{F}_t : t \in D$ *и* $t > s\}$. Так как $F_t \subset \bar{F}_t$ при любом t, то не вызывает сомнений, что $\bigcap \{F_t : t \in D$ *и* $t > s\} \subset \{\bar{F}_t : t \in D$ *и*

$t>s\}$. С другой стороны, для каждого $t \in D$, большего s, найдется $r \in D$ такое, что $s<r<t$; тогда $\bar{F}_r \subset F_t$. Доказано тем самым и обратное включение.

Принципиально важный результат этого параграфа доказывается теперь легко.

4. Лемма (Урысон). *Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B нормального пространства X существует непрерывная функция f на X со значениями в интервале* $[0, 1]$, *равная нулю на A и единице на B.*

Доказательство. Пусть D — множество положительных двоично рациональных чисел (т. е. множество всех чисел вида $p \cdot 2^{-q}$, где p и q — положительные целые числа). Пусть $t \in D$; при $t>1$ положим $F(t)=X$, пусть $F(1)=X \setminus B$ (случай $t=1$) и $F(0)$ — любое открытое множество, содержащее A, замыкание которого не пересекается с B. Если $t \in D$ и $0<t<1$, то запишем t в виде $t=(2m+1) \cdot 2^{-n}$ и выберем, применяя индукцию по n, в качестве $F(t)$ какое-нибудь открытое множество, содержащее множество $\overline{F(2m \cdot 2^{-n})}$ и такое, что $\overline{F(t)} \subset F((2m+2) \cdot 2^{-n})$. Сделать это можно в силу нормальности пространства X. Положим $f(x)=\inf\{t : x \in F(t)\}$. По предыдущей лемме f — непрерывная функция. Она равна нулю на A, ибо $A \subset F(t)$ при каждом t из D, и равна единице на B, ибо $F(t) \subset X \setminus B$ при $t \leqslant 1$ и $F(t)=X$ при $t>1$.

ВЛОЖЕНИЕ В КУБЫ

Декартово произведение замкнутых единичных интервалов, наделенное топологией произведения, называется *кубом*. Куб, таким образом, — это множество Q^A всех функций, определенных на некотором множестве A со значениями в замкнутом единичном интервале Q, наделенное топологией поточечной, или покоординатной, сходимости. Кубы играют роль стандартных пространств. Мы собираемся описать топологические пространства, гомеоморфные подпространствам кубов. Способ, которым это делается, прост, но замечателен *). Он будет применяться затем при других обстоятельствах.

---

*) Этот способ, восходящий еще к П. С. Урысону, в полной общности впервые был развит А. Н. Тихоновым (*Прим. перев.*)