$t>s\}$. С другой стороны, для каждого $t\in D$, большего s, найдется $r\in D$ такое, что $s<r<t$; тогда $\bar{F}_r\subset F_t$. Доказано тем самым и обратное включение.

Принципиально важный результат этого параграфа доказывается теперь легко.

4. Лемма (Урысон). *Для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B нормального пространства X существует непрерывная функция f на X со значениями в интервале* $[0, 1]$, *равная нулю на A и единице на B.*

Доказательство. Пусть D — множество положительных двоично рациональных чисел (т. е. множество всех чисел вида $p\cdot 2^{-q}$, где p и q — положительные целые числа). Пусть $t\in D$; при $t>1$ положим $F(t)=X$, пусть $F(1)=X\setminus B$ (случай $t=1$) и $F(0)$ — любое открытое множество, содержащее A, замыкание которого не пересекается с B. Если $t\in D$ и $0<t<1$, то запишем t в виде $t=(2m+1)\cdot 2^{-n}$ и выберем, применяя индукцию по n, в качестве $F(t)$ какое-нибудь открытое множество, содержащее множество $\overline{F(2m\cdot 2^{-n})}$ и такое, что $\overline{F(t)}\subset$ $\subset F((2m+2)\cdot 2^{-n})$. Сделать это можно в силу нормальности пространства X. Положим $f(x)=\inf\{t : x\in F(t)\}$. По предыдущей лемме f — непрерывная функция. Она равна нулю на A, ибо $A\subset F(t)$ при каждом t из D, и равна единице на B, ибо $F(t)\subset X\setminus B$ при $t\leqslant 1$ и $F(t)=X$ при $t>1$.

ВЛОЖЕНИЕ В КУБЫ

Декартово произведение замкнутых единичных интервалов, наделенное топологией произведения, называется *кубом*. Куб, таким образом, — это множество Q^A всех функций, определенных на некотором множестве A со значениями в замкнутом единичном интервале Q, наделенное топологией поточечной, или покоординатной, сходимости. Кубы играют роль стандартных пространств. Мы собираемся описать топологические пространства, гомеоморфные подпространствам кубов. Способ, которым это делается, прост, но замечателен*). Он будет применяться затем при других обстоятельствах.

*) Этот способ, восходящий еще к П. С. Урысону, в полной общности впервые был развит А. Н. Тихоновым (*Прим. перев.*)

Пусть F — некоторое семейство отображений, определенных на одном и том же топологическом пространстве X со значениями в разных, вообще говоря, пространствах (пространство значений отображения $f \in F$ будет обозначаться через Y_f). Тогда имеет место естественное отображение пространства X в произведение $\Pi\{Y_f : f \in F\}$ — точка $x \in X$ переходит при этом отображении в элемент произведения, f-я координата которого равна $f(x)$. Формально отображение вычисления определяется так: $e(x)_f = f(x)$. Оказывается, отображение e непрерывно, если непрерывны отображения из F, и e является гомеоморфизмом, если семейство F содержит «достаточно отображений». Говорят, что семейство F отображений множества X *различает точки*, тогда и только тогда, когда для каждой пары различных точек x и y найдется такой элемент $f \in F$, что $f(x) \neq f(y)$. Семейство F *различает точки и замкнутые множества* в том и только в том случае, когда для каждого замкнутого подмножества A пространства X и каждой точки x из $X \setminus A$ существует такое отображение $f \in F$, что $f(x)$ не принадлежит замыканию множества $f[A]$.

5. Лемма о вложении. *Пусть F — семейство, произвольный элемент которого f есть непрерывное отображение топологического пространства X в некоторое топологическое пространство Y_f. Тогда:*

(а) *Отображение вычисления является непрерывным отображением пространства X в пространство произведения $\Pi\{Y_f : f \in F\}$.*

(б) *Если семейство F различает точки и замкнутые множества, то отображение e является открытым отображением пространства X на пространство $e[X]$.*

(в) *Отображение e взаимно однозначно в том и только в том случае, когда семейство F различает точки.*

Доказательство. Последовательно выполняя отображение e и проектирование P_f на f-е координатное пространство, мы получаем непрерывное отображение, ибо $P_f \circ e(x) = f(x)$. Следовательно, в силу теоремы 3.3 отображение e непрерывно. Для доказательства утверждения (б) достаточно установить, что образ при e любой открытой окрестности U произвольной точки x содержит пересечение множества $e[X]$ с некоторой окрестностью точки $e(x)$ в произведении. Выберем в F элемент f так, чтобы точка $f(x)$ не входила в замыкание множества $f[X \setminus A]$. Множество всех точек y произведения таких, что $y_f \notin \overline{f[X \setminus U]}$, открыто и, очевидно, его пересечение с множеством $e[X]$ содержится в $e[U]$. Значит, e — открытое отображение пространства X на пространство $e[X]$. Утверждение (в) ясно без доказательства.

Предшествующая лемма сводит задачу топологического вложения пространства в куб к отысканию «богатого» семейства непрерывных вещественных функций, определенных на этом пространстве. Бывают топологические пространства, на которых каждая непрерывная вещественная функция постоянна. Например, таково любое антидискретное пространство. Есть и менее тривиальные примеры: существуют регулярные хаусдорфовы пространства, на которых каждая непрерывная вещественная функция является константой *). Топологическое пространство X называется *вполне регулярным* тогда и только тогда, когда для каждой точки x и любой ее окрестности U на X существует непрерывная функция f со значениями в замкнутом единичном интервале, равная нулю в точке x и тождественно равная единице на множестве $X \setminus U$. Ясно, что семейство всех непрерывных отображений вполне регулярного пространства в единичный интервал $[0,1]$ различает точки и замкнутые множества в смысле предшествующей леммы. (Верно и обратное утверждение, но это нам здесь не понадобится.) Если вполне регулярное пространство удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости ($\{x\}$ — замкнутое множество для любой точки x), то семейство всех его непрерывных отображений в отрезок $[0,1]$ различает также и точки. Вполне регулярное T_1-пространство называется *тихоновским пространством* **). Пусть X — тихо-

---

*) Первое пространство этого рода было построено П. С. Урысоном. См. также Хьюитт [1], Новак [1], ван Эст и Фрейденталь [1].

**) Заметим, что в журнальной литературе на русском и английском языках принято называть вполне регулярными лишь вполне регулярные T_1-пространства. Аналогичное замечание относится и к нормальным пространствам. (*Прим. перев.*)

новское пространство и F — семейство всех непрерывных вещественных функций на X, значения которых заключены в отрезке $[0,1]$. Лемма 4.5 о вложении позволяет утверждать, что отображение вычисления пространства X в куб Q^F является гомеоморфизмом. Таким образом, каждое тихоновское пространство гомеоморфно подпространству некоторого куба. Это свойство в действительности характеризует тихоновские пространства, как мы очень скоро увидим.

Каждое нормальное T_1-пространство является тихоновским пространством в силу леммы Урысона (4.4). Любое вполне регулярное пространство регулярно, ибо если U — какая-нибудь окрестность точки x и f — непрерывная функция, равная нулю в x и единице на $X \setminus U$, то $V = \left\{ y : f(y) < \frac{1}{2} \right\}$ — открытое множество, замыкание которого содержится в множестве $\left\{ y : f(y) \leqslant \frac{1}{2} \right\}$, а последнее является частью множества U. Есть целая иерархия аксиом отделимости для T_1-пространств: хаусдорфовость, регулярность, полная регулярность и нормальность. За исключением нормальности, все они передаются по наследству — в том смысле, что если некоторое пространство обладает одним из перечисленных свойств, то и любое его подпространство обладает этим свойством. Произведение пространств, относящихся к одному из названных типов, снова будет пространством того же типа; исключение опять составляют нормальные пространства. Доказать все эти факты, за исключением одного, описанного ниже, — он понадобится нам теперь — предоставляется читателю в качестве упражнений (4.3).

6. Теорема. *Произведение тихоновских пространств является тихоновским пространством.*

Доказательство. Условимся для удобства говорить, что непрерывное отображение f топологического пространства X в замкнутый единичный интервал *соответствует* паре (x, U), в том и только в том случае, когда x — точка, U — ее окрестность, $f(x) = 0$ и функция f тождественно равна единице на множестве $X \setminus U$. Пусть функции $f_1, \ldots, f_n$ соответствуют парам $(x, U_1), \ldots$

..., (x, U_n), где n — положительное целое число, и $g(y) = \sup\{f_i(y): i=1, \ldots, m\}$ для любого y; тогда функция g соответствует паре $(x, \bigcap\{U_i: i=1, \ldots, n\})$. Следовательно, пространство вполне регулярно, если для каждой точки x и каждой ее окрестности U из некоторой фиксированной предбазы топологии найдется функция, соответствующая паре (x, U). Пусть X — пространство произведения $\Pi\{X_a : a \in A\}$ тихоновских пространств, x — любая его точка, а U_a — произвольная окрестность точки x_a в X_a. Пусть функция f соответствует паре (x_a, U_a), тогда функция $f \circ P_a$, где P_a — проектирование на a-е координатное пространство, соответствует паре $(x, P_a^{-1}[U_a])$. Семейство множеств вида $P_a^{-1}[U_a]$ образует предбазу топологии произведения. Следовательно, пространство произведения вполне регулярно. Так как произведение T_1-пространств является T_1-пространством, то теорема доказана.

7. Теорема о вложении (Тихонов [2]). *Для того чтобы топологическое пространство было тихоновским, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно подпространству некоторого куба.*

Доказательство. Замкнутый единичный интервал является тихоновским пространством. Значит, куб, будучи произведением единичных интервалов, тоже является тихоновским пространством. Поэтому и каждое подпространство куба — тихоновское пространство. Уже отмечалось, что если X — тихоновское пространство и F — семейство всех непрерывных отображений пространства X в замкнутый единичный интервал Q, то (по лемме о вложении, 4.5) соответствующее отображение вычисления является гомеоморфизмом пространства X в куб Q^F.

МЕТРИЧЕСКИЕ И ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Есть много топологических пространств, топология которых определяется через расстояние. *Метрика* на множестве X — это определенная на декартовом произведении $X \times X$ функция d, значениями которой служат