..., (x, U_n), где n — положительное целое число, и $g(y) = \sup\{f_i(y): i=1, \ldots, m\}$ для любого y; тогда функция g соответствует паре $(x, \cap\{U_i: i=1, \ldots, n\})$. Следовательно, пространство вполне регулярно, если для каждой точки x и каждой ее окрестности U из некоторой фиксированной предбазы топологии найдется функция, соответствующая паре (x, U). Пусть X — пространство произведения $\Pi\{X_a: a \in A\}$ тихоновских пространств, x — любая его точка, а U_a — произвольная окрестность точки x_a в X_a. Пусть функция f соответствует паре (x_a, U_a), тогда функция $f \circ P_a$, где P_a — проектирование на a-е координатное пространство, соответствует паре $(x, P_a^{-1}[U_a])$. Семейство множеств вида $P_a^{-1}[U_a]$ образует предбазу топологии произведения. Следовательно, пространство произведения вполне регулярно. Так как произведение T_1-пространств является T_1-пространством, то теорема доказана.

7. Теорема о вложении (Тихонов [2]). *Для того чтобы топологическое пространство было тихоновским, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфно подпространству некоторого куба.*

Доказательство. Замкнутый единичный интервал является тихоновским пространством. Значит, куб, будучи произведением единичных интервалов, тоже является тихоновским пространством. Поэтому и каждое подпространство куба — тихоновское пространство. Уже отмечалось, что если X — тихоновское пространство и F — семейство всех непрерывных отображений пространства X в замкнутый единичный интервал Q, то (по лемме о вложении, 4.5) соответствующее отображение вычисления является гомеоморфизмом пространства X в куб Q^F.

МЕТРИЧЕСКИЕ И ПСЕВДОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Есть много топологических пространств, топология которых определяется через расстояние. *Метрика* на множестве X — это определенная на декартовом произведении $X \times X$ функция d, значениями которой служат неотрицательные вещественные числа, удовлетворяющая при любых x, y и z из X следующим условиям *):

(а) $d(x, y)=d(y, x)$,

(б) (*неравенство треугольника*) $d(x, y)+d(y, z)\geqslant \geqslant d(x, z)$,

(в) $d(x, y)=0$, если $x=y$,

(г) если $d(x, y)=0$, то $x=y$.

Последнее условие для многих целей несущественно. Функция d, которая удовлетворяет только условиям (а), (б) и (в), называется *псевдометрикой*. В этом параграфе все определения формулируются для псевдометрик. Само собой разумеется, имеют место аналогичные определения и для метрик.

Псевдометрическим пространством называется пара (X, d), где X — множество, а d — псевдометрика на нем. Число $d(x, y)$, где x и y — элементы из X, называется *расстоянием* между x и y (d-расстоянием, если возможна путаница). Пусть r — положительное число. Множество $\{y : d(x, y)<r\}$ называется *открытым шаром* d-радиуса r с центром в точке x (около точки x) или, коротко, открытым r-шаром около x; множество $\{y : d(x, y)\leqslant \leqslant r\}$ — *замкнутым r-шаром около x*. Пересечение двух открытых шаров не обязано быть шаром. Однако если $d(x, y)<r$ и $d(x, z)<s$, то любая точка w, для которой $d(w, x)<\min[r-d(x, y), s-d(x, z)]$, входит как в открытый r-шар около y, так и в открытый s-шар около z в силу неравенства треугольника. Следовательно, каждая точка из пересечения любых двух открытых шаров входит в это пересечение вместе с некоторым открытым шаром около нее. Значит, семейство всех открытых шаров является базой некоторой топологии на X (см. 1.11). Эту топологию называют *псевдометрической топологией*, или топологией, *индуцированной на X заданной псевдометрикой*. Заметьте, что каждый замкнутый шар замкнут относительно соответствующей псевдометрической топологии.

---

*) Обычно (в частности, в русской, польской и немецкой литературе) принято расстояние обозначать через $\rho(x, y)$ (а не через $d(x, y)$) (*Прим. перев.*)

Пусть X — некоторое множество. Положим $d(x, y)=0$, если $x=y$, и $d(x, y)=1$ в противном случае. Тогда d — метрика на X, а открытый 1-шар около произвольной точки x совпадает с множеством $\{x\}$. Следовательно, множество $\{x\}$ открыто в топологии, индуцированной рассматриваемой метрикой, т. е. топологическое пространство, порожденное d, дискретно. Замкнутый 1-шар около произвольной точки из X есть все множество X; таким образом, замыкание открытого r-шара может сильно отличаться от замкнутого r-шара с центром в той же точке. Если положить функцию d равной нулю для всех пар (x, y) из $X \times X$, то d не будет метрикой, но будет псевдометрикой. В этом случае открытым r-шаром с центром в произвольной точке служит все пространство, а псевдометрическая топология совпадает с антидискретной топологией на X. Пусть X — множество всех вещественных чисел и $d(x, y)=|x-y|$; тогда d будет метрикой на X — она называется *обычной метрикой* вещественных чисел. Топология, индуцированная обычной метрикой, совпадает, к счастью, с обычной топологией вещественных чисел.

Расстояние от точки x до подмножества A относительно псевдометрики d есть $D(A, x)=\inf\{d(x, y) : y \in A\}$.

8. Теорема. *Пусть A — фиксированное подмножество некоторого псевдометрического пространства. Расстояние от точки x до множества A является непрерывной функцией x относительно псевдометрической топологии.*

Доказательство. Из неравенства $d(x, z) \leqslant d(x, y)+d(y, z)$, беря нижнюю грань левой и правой части по всем $z \in A$, выводим, что $D(A, x) \leqslant d(x, y)+D(A, y)$. Верно также неравенство, которое получится из этого, если поменять местами x и y. Значит, $|D(A, x)-D(A, y)| \leqslant d(x, y)$. Следовательно, для любой точки y из открытого r-шара с центром в точке x будет $|D(A, x)-D(A, y)|<r$, чем непрерывность доказана.

9. Теорема. *Замыкание множества A в псевдометрическом пространстве есть множество всех точек этого пространства, лежащих от A на нулевом расстоянии.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $D(A, x)$ в точке x множество $\{x : D(A, x) = 0\}$ замкнуто и содержит множество A. Поэтому оно содержит и замыкание $\bar{A}$ множества A. Пусть $y \notin \bar{A}$. Тогда у точки y найдется окрестность, не пересекающая множества A, которую можно считать открытым r-шаром. При этом $D(A, y) \geqslant r$ и, значит, $\{x : D(A, x) = 0\} \subset \bar{A}$. Следовательно, $\bar{A} = \{x : D(A, x) = 0\}$.

10. Теорема. *Каждое псевдометрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества псевдометрического пространства X и $D(A, x)$, $D(B, x)$ — расстояния от точки x до множеств A и B соответственно. Положим $U = \{x : D(A, x) - D(B, x) < 0\}$ и $V = \{x : D(A, x) - D(B, x) > 0\}$. Функция $D(A, x) - D(B, x)$ непрерывна в точке x, поэтому множества U и V открыты. Ясно, что множества U и V не пересекаются; применяя 4.9, мы заключаем, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

11. Теорема. *Каждое псевдометрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Вторая аксиома счетности выполняется в псевдометрическом пространстве в том и только в том случае, когда оно сепарабельно.*

Доказательство. Множество открыто в псевдометрической топологии тогда и только тогда, когда оно содержит каждую свою точку вместе с некоторой ее шаровой окрестностью. Это означает, что семейство открытых шаров с центром в точке x образует базу топологии в x. Так как произвольный открытый шар с центром в x содержит концентрический шар рационального радиуса, то у системы окрестностей точки x есть счетная база, т. е. наше пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности. Каждое пространство со счетной базой сепарабельно. Значит, осталось доказать, что топология сепарабельного псевдометрического пространства имеет счетную базу. Пусть Y — счетное плотное в рассматриваемом пространстве подмножество и $\mathfrak{U}$ — семейство всех открытых шаров рационального радиуса с центрами в точках множества Y. Семейство $\mathfrak{U}$, несомненно, счетно. Пусть U — любая окрестность произвольной точки x; при некотором положительном r открытый r-шар с центром в x содержится в U. Пусть s — какое-нибудь положительное рациональное число, меньшее r, и y — точка из Y, для которой $d(x, y) < \frac{s}{3}$. Обозначим через V открытый $\frac{2s}{3}$-шар с центром в точке y. Тогда $x \in V \subset U$; значит, $\mathfrak{U}$ — база рассматриваемой топологии.

12. Теорема. *Направленность $\{S_n, n \in D\}$ в псевдометрическом пространстве (X, d) сходится к точке s в том и только в том случае, когда направленность $\{d(S_n, s), n \in D\}$ сходится к нулю.*

Доказательство. Направленность $\{S_n, n \in D\}$ сходится к точке s тогда и только тогда, когда, начиная с некоторого момента, она попадает в произвольный открытый r-шар, описанный около s. Однако последнее имеет место в том и лишь в том случае, когда направленность $\{d(S_n, s), n \in D\}$ с некоторого момента находится в каждом открытом r-шаре около нулевой точки множества вещественных чисел, наделенного обычной метрикой.

Диаметром подмножества A псевдометрического пространства (X, d) называется $\sup\{d(x, y) : x \in A$ *и* $y \in A\}$. Если наименьшей верхней грани у стоящего в скобках множества чисел нет, то говорят, что диаметр множества бесконечен. Очевидно, свойство иметь конечный диаметр не является топологическим инвариантом.

13. Теорема. *Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство и $e(x, y) = \min[1, d(x, y)]$. Тогда (X, e) — псевдометрическое пространство, топология которого совпадает с топологией пространства (X, d).*

Следовательно, каждое псевдометрическое пространство гомеоморфно псевдометрическому пространству, диаметр которого не превосходит единицы.

Доказательство. Для доказательства того, что e — псевдометрика, достаточно установить, что если неотрицательные числа a, b и c удовлетворяют условию $a + b \geqslant c$, то $\min[1, a] + \min[1, b] \geqslant \min[1, c]$. В самом деле, последнее неравенство становится неравенством треугольника, если положить $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$ и $c = d(x, z)$. Если хотя бы одно из чисел $\min[1, a]$,

$\min[1, b]$ равно единице, то проверяемое неравенство, очевидно, выполняется — ведь $\min[1, c] \leqslant 1$. Если ни одно из них не равно единице, то достаточно сослаться на неравенство $a+b \geqslant c \geqslant \min[1, c]$. Значит, e — псевдометрика на X. Семейство всех открытых шаров радиуса, меньшего единицы, образует базу соответствующей псевдометрической топологии. Так как это семейство одно и то же для псевдометрик d и e, то соответствующие им псевдометрические топологии совпадают. Ясно, что e — диаметр множества X — равен, самое большее, единице.

Произведение несчетного множества топологических пространств не удовлетворяет, как правило, первой аксиоме счетности (см. 3.6). Не следует поэтому ожидать, что на произведении произвольного семейства псевдометрических пространств удастся так определить псевдометрику, что соответствующая псевдометрическая топология будет топологией произведения. Гораздо лучше обстоят дела в случае счетных произведений. В силу предыдущей теоремы мы ограничимся псевдометрическими пространствами, диаметр которых не превосходит единицы.

14. Теорема. *Пусть $\{(X_n, d_n),\ n \in \omega\}$ — последовательность псевдометрических пространств, диаметр каждого из которых не превосходит единицы; положим $d(x, y) = \sum\{2^{-n} d_n(x_n, y_n) : n \in \omega\}$. Функция d является псевдометрикой на декартовом произведении пространств X_n, $n \in \omega$, причем соответствующая ей псевдометрическая топология совпадает с топологией произведения.*

Доказательство. Что d — псевдометрика, доказывается просто; мы этого делать не будем. (Задача 2.Ж о суммируемости дает необходимую технику.) Докажем, что совпадают топологии. Заметим сначала, что если V есть 2^{-p}-шаровая окрестность около точки x произведения и $U = \{y : d_n(x_n, y_n) < 2^{-p-n-2}$ *при* $n \leqslant p+2\}$, то $U \subset V$. Действительно, если $y \in U$, то

$$d(x, y) < \sum\{2^{-p-n-2} : n = 0, \ldots, p+2\} + \\ + \sum\{2^{-n} : n = p+2, \ldots\} < 2^{-p-1} + 2^{-p-1} = 2^{-p}.$$

Но U — окрестность точки x в топологии произведения, значит, каждое множество, открытое в псевдометрической топологии, открыто и в топологии произведения. Докажем обратное. Рассмотрим произвольный элемент U определяющей предбазы *) топологии произведения. Множество U имеет вид $\{x : x_n \in W\}$, где W — некоторое открытое подмножество пространства X_n. Для каждой точки $x \in U$ можно найти открытый r-шар в пространстве X_n с центром в x_n, целиком лежащий в W. Так как $d(x, y) \geqslant 2^{-n} d_n(x_n, y_n)$, то открытый $r \cdot 2^{-n}$-шар в произведении с центром в x содержится в U. Значит, каждый элемент определяющей предбазы, а следовательно и каждый элемент топологии произведения, открыт в псевдометрической топологии.

Пусть (X, d) и (Y, e) — псевдометрические пространства, f — отображение X на Y. Говорят, что f — *изометрия* (d-изометрия), в том и только в том случае, когда $d(x, y) = e(f(x), f(y))$ для всех точек x и y из X. Каждая изометрия является непрерывным открытым отображением (относительно соответствующих псевдометрических топологий), ибо образ открытого r-шара около x является открытым r-шаром около $f(x)$. Композиция двух изометрий — снова изометрия, и если изометрия взаимно однозначна, то обратное к ней отображение тоже является изометрией. В случае метрического пространства изометрия непременно взаимно однозначна; каждая изометрия метрического пространства является гомеоморфизмом. Совокупность всех метрических пространств распадается на классы эквивалентности, образованные попарно изометричными пространствами. Каждое свойство метрического пространства, которым обладает также любое изометричное ему метрическое пространство, называется метрическим инвариантом. Метрический инвариант может не быть топологическим инвариантом (примером может служить свойство бесконечности диаметра).

---

*) Определяющей предбазой топологии произведения называется здесь и в дальнейшем предбаза, построенная при определении топологии произведения в этой книге. (*Прим. перев.*)

Псевдометрические пространства лишь немного отличаются от метрических; в каком смысле — мы сейчас точно сформулируем. Удобно согласиться называть *расстоянием между подмножествами A и B* псевдометрического пространства число $D(A, B) = \operatorname{dist}(A, B) = \inf\{(x, y) : x \in A$ *и* $y \in B\}$. Вообще говоря, D — не псевдометрика, ибо все пространство X лежит на нулевом расстоянии от каждого своего непустого подмножества и, значит, не выполняется неравенство треугольника. Однако D является метрикой на множестве элементов некоторого разбиения, которое мы сейчас определим. Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех множеств вида $\overline{\{x\}}$. В силу 4.9 множество $\overline{\{x\}}$ состоит в точности из всех тех точек y, для которых $d(x, y) = 0$, и разбиение $\mathfrak{D}$ есть фактор-множество X/R, где R — отношение $\{(x, y) : d(x, y) = 0\}$.

15. Теорема. *Пусть (X, d) — псевдометрическое пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех множеств вида $\overline{\{x\}}$, где $x \in X$. Положим $D(A, B) = \operatorname{dist}(A, B)$ для произвольных элементов A и B разбиения $\mathfrak{D}$. Тогда $(\mathfrak{D}, D)$ — метрическое пространство, топология которого совпадает с фактор-топологией на $\mathfrak{D}$; при этом проектирование пространства X на пространство $\mathfrak{D}$ является изометрией.*

Доказательство. Точка u принадлежит множеству $\overline{\{x\}}$ тогда и только тогда, когда $d(u, x) = 0$, а последнее выполняется тогда и только тогда, когда $x \in \overline{\{u\}}$. Если $u \in \overline{\{x\}}$ и $v \in \overline{\{y\}}$, то $d(u, v) \leqslant d(u, x) + d(x, y) + d(y, v) = d(x, y)$. Следовательно, так как в этом случае $x \in \overline{\{u\}}$, $y \in \overline{\{v\}}$, то $d(u, v) = d(x, y)$. Таким образом, для любых элементов A и B семейства $\mathfrak{D}$ число $D(A, B)$ совпадает с расстоянием $d(x, y)$ между произвольной точкой x из A и произвольной точкой y из B. Поэтому $(\mathfrak{D}, D)$ — метрическое пространство и проектирование X на $\mathfrak{D}$ является изометрией. Если U — множество, открытое в X, и $x \in U$, то для некоторого $r > 0$ U содержит открытый r-шар с центром в x, а потому содержит и множество $\overline{\{x\}}$. В силу 3.10 отсюда следует, что проектирование пространства X на $\mathfrak{D}$ является открытым отображением относительно фактор-топологии на $\mathfrak{D}$. Оно является открытым отображением и по отношению к метрической топологии, соответствующей метрике D. Следовательно, в силу 3.8 эти топологии совпадают.

МЕТРИЗАЦИЯ

Пусть задано топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$; естественно спросить: существует ли на множестве X метрика, которая индуцирует на X топологию $\mathfrak{J}$*)? Если такая метрика существует, то говорят, что она *метризует* рассматриваемое топологическое пространство, которое в этом случае называется *метризуемым*. Подобным же образом говорят, что топологическое пространство *псевдометризуемо*, в том и только в том случае, когда на нем существует псевдометрика, псевдометрическая топология которой совпадает с топологией этого пространства. Псевдометрика является метрикой в том и только в том случае, когда индуцированная ею топология удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости (т. е. когда множество $\{x\}$ замкнуто для каждой точки x пространства). В этом параграфе теоремы формулируются для случая метризуемых пространств. Аналогичные утверждения для псевдометризуемых пространств будут очевидны сами по себе.

В двух основных теоремах этого параграфа даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы топологическое пространство было соответственно метризуемо и сепарабельно или просто метризуемо. Первая из них — это классическая метризационная теорема Урысона. Все части ее доказательства уже подготовлены нами; осталось только соединить их. Вторая теорема была доказана лишь недавно (история ее описывается в замечаниях в конце этого параграфа). Оказывается, немного изменив процедуру, предложенную Урысоном, можно доказать достаточность общего метризационного условия. Однако доказательство необходимости этого условия требует качественно нового построения.

*) Этот вопрос был впервые поставлен и исследован П. С. Александровым и П. С. Урысоном в их совместных работах [1], [2] и Урысоном в [2] в 1922—1924 гг. (*Прим. перев.*)