бражением относительно фактор-топологии на $\mathfrak{D}$. Оно является открытым отображением и по отношению к метрической топологии, соответствующей метрике D. Следовательно, в силу 3.8 эти топологии совпадают.

МЕТРИЗАЦИЯ

Пусть задано топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$; естественно спросить: существует ли на множестве X метрика, которая индуцирует на X топологию $\mathfrak{J}$*)? Если такая метрика существует, то говорят, что она *метризует* рассматриваемое топологическое пространство, которое в этом случае называется *метризуемым*. Подобным же образом говорят, что топологическое пространство *псевдометризуемо*, в том и только в том случае, когда на нем существует псевдометрика, псевдометрическая топология которой совпадает с топологией этого пространства. Псевдометрика является метрикой в том и только в том случае, когда индуцированная ею топология удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости (т. е. когда множество $\{x\}$ замкнуто для каждой точки x пространства). В этом параграфе теоремы формулируются для случая метризуемых пространств. Аналогичные утверждения для псевдометризуемых пространств будут очевидны сами по себе.

В двух основных теоремах этого параграфа даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы топологическое пространство было соответственно метризуемо и сепарабельно или просто метризуемо. Первая из них — это классическая метризационная теорема Урысона. Все части ее доказательства уже подготовлены нами; осталось только соединить их. Вторая теорема была доказана лишь недавно (история ее описывается в замечаниях в конце этого параграфа). Оказывается, немного изменив процедуру, предложенную Урысоном, можно доказать достаточность общего метризационного условия. Однако доказательство необходимости этого условия требует качественно нового построения.

---

*) Этот вопрос был впервые поставлен и исследован П. С. Александровым и П. С. Урысоном в их совместных работах [1], [2] и Урысоном в [2] в 1922—1924 гг. (*Прим. перев.*)

Определяемые в этом параграфе понятия подвергаются затем дальнейшему изучению в последнем параграфе главы 5. Наконец, иная точка зрения на проблему метризации развивается в главе 7, однако, полученные там результаты не содержат теорем данного параграфа.

План доказательства условия метризуемости очень прост. В соответствии с теоремой 4.14 произведение счетного семейства псевдометрических пространств псевдометризуемо. По лемме о вложении (4.5), если F — семейство непрерывных отображений T_1-пространства X, где областью значений отображения $f \in F$ служит некоторое подпространство пространства Y_f, то отображение вычисления пространства X в произведение $\Pi\{Y_f : f \in F\}$ является гомеоморфизмом, коль скоро F различает точки и замкнутые множества (т. е. если A — замкнутое подмножество пространства X и x — точка из $X \setminus A$, то $f(x) \notin \overline{f[A]}$ для некоторого $f \in F$). Проблема метризации T_1-пространства X сводится поэтому к отысканию счетного семейства отображений пространства X в псевдометризуемые пространства, отделяющего точки от замкнутых множеств. (Ведь псевдометризуемое T_1-пространство непременно метризуемо.)

Для удобства условимся через Q^ω обозначать произведение замкнутого единичного интервала на себя счетное число раз, т. е. Q^ω — это семейство всех отображений множества неотрицательных целых чисел в замкнутый единичный интервал, наделенное топологией произведения.

16. Метризационная теорема (Урысон). *Регулярное T_1-пространство со счетной базой гомеоморфно некоторому подпространству куба Q^ω и потому метризуемо* *).

Доказательство. Ввиду замечаний, предшествующих теореме, достаточно доказать, что существует счетное семейство непрерывных отображений пространства X в Q, отделяющее точки от замкнутых множеств.

*) На самом деле Урысон формулировал свою теорему для нормальных пространств со счетной базой. На регулярные пространства со счетной базой ее распространил впоследствии А. Н. Тихонов. (*Прим. перев.*)

Пусть $\mathfrak{B}$ — какая-нибудь счетная база топологии, заданной на X. Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех пар (U, V) элементов базы $\mathfrak{B}$ таких, что $\overline{U} \subset V$. Ясно, что $\mathfrak{A}$ счетно. Выберем для каждой пары (U, V) из $\mathfrak{A}$ непрерывную функцию на X со значениями в Q, равную нулю на U и единице на $X \setminus V$ (такая функция существует в силу леммы Тихонова 4.1 и леммы Урысона 4.4), и обозначим через F семейство всех отобранных функций. Семейство F счетно; остается только показать, что F отделяет точки от замкнутых множеств. Пусть B — замкнутое множество и $x \in X \setminus B$. Выберем $V \in \mathfrak{B}$ так, чтобы было $x \in V \subset X \setminus B$; далее, выберем $U \in \mathfrak{B}$ так, чтобы было $x \in \overline{U} \subset V$. Тогда $(U, V) \in \mathfrak{A}$, и для соответствующего этой паре элемента $f \in F$ мы имеем $f(x) = 0 \notin \{1\} = \overline{f(B)}$.

Легко описать класс топологических пространств, к которым применима предшествующая метризационная теорема.

17. Теорема. *Для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны:*

(а) *X регулярно, и у его топологии есть счетная база.*

(б) *X гомеоморфно подпространству куба Q^ω.*

(в) *X метризуемо и сепарабельно.*

Доказательство. Предыдущая теорема показывает, что из (а) следует (б). Куб Q^ω метризуем в силу теоремы 4.14 и удовлетворяет второй аксиоме счетности (3.Н). Следовательно, и каждое его подпространство метризуемо и удовлетворяет второй аксиоме счетности (значит, сепарабельно). Таким образом, из (б) следует (в). (Предостережение: не верно, что подпространство сепарабельного пространства непременно сепарабельно.) Наконец, из (в) следует (а), ибо если X метризуемо и сепарабельно, то оно обязательно регулярно и в силу теоремы 4.11 удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Метризационная теорема, охватывающая не только сепарабельные пространства, существенно опирается на идеи, примененные при доказательстве теоремы Урысона. При простом обсуждении методологии мы легко обнаружим место, где примененная процедура может быть усовершенствована. Построение метрики на X основывается на определении подходящего семейства отображений X в псевдометризуемые пространства. Но заметьте: до сих пор в качестве пространства значений фигурировал исключительно единичный интервал Q. Рассуждая чуть иначе, чем раньше, можно сказать, что если f — отображение X в Q, то, полагая $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, мы получаем некоторую псевдометрику на X. В процессе урысоновской метризации участвует счетное множество таких псевдометрик. Задача состоит в том, чтобы обобщить это построение. Пусть F — семейство отображений пространства X в Q; на роль псевдометрики естественно претендует тогда сумма $\Sigma\{|f(x) - f(y)| : f \in F\}$. Нужно, чтобы эта сумма была непрерывна по x и y, для того, чтобы тождественное отображение X на псевдометрическое пространство (X, d) было непрерывно. Это требование выполняется при гораздо более слабом условии, чем конечность семейства F, — достаточно, чтобы у каждой точки $x \in X$ существовала окрестность U, на которой обращаются в нуль все элементы семейства F, за исключением конечного числа. Иными словами, годится некоторое условие типа локальной конечности. Понятие локальной конечности — ключ к решению задачи.

Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства называется *локально конечным* *) тогда и только тогда, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным множеством элементов семейства $\mathfrak{A}$. Из этого определения немедленно следует, что точка является предельной для объединения $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ тогда и только тогда, когда она является предельной точкой для некоторого элемента семейства $\mathfrak{A}$. Следовательно, замыкание этого объединения равно объединению замыканий слагаемых, т. е. $\overline{\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\}} = \bigcup\{\bar{A} : A \in \mathfrak{A}\}$. Очевидно также, что замыкания элементов семейства $\mathfrak{A}$ образуют локально конечное семейство. Семейство $\mathfrak{A}$ называется *дискретным*, если у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом семейства $\mathfrak{A}$. Любое дискретное семейство локально конечно. Если $\mathfrak{A}$ дискретно, то семейство замыканий элементов

*) Это понятие было введено П. С. Александровым в 1924 г. в работе [1]. (*Прим. перев.*)

из $\mathfrak{A}$ тоже дискретно. Наконец, скажем, что семейство $\mathfrak{A}$ *σ-локально конечно* (σ-дискретно), в том и только в том случае, когда оно является объединением счетного числа локально конечных (соответственно дискретных) своих подсемейств.

Теперь мы можем сформулировать следующую метризационную теорему. Ее доказательство распадается в последовательность лемм.

18. Метризационная теорема. *Следующие три ограничения на топологическое пространство равносильны:*

(а) *Пространство метризуемо.*

(б) *Пространство удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости, регулярно и обладает σ-локально конечной базой.*

(в) *Пространство является регулярным T_1-пространством с σ-дискретной базой.*

Ясно, что из условия (в) следует (б). Мы докажем, что из (б) следует (а) и что из (а) следует (в). Первый этап рассуждения заключается в доказательстве леммы, являющейся разновидностью леммы Тихонова (4.1).

19. Лемма. *Регулярное пространство с σ-локально конечной базой нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Тогда существуют открытые покрытия $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ множеств A и B соответственно такие, что замыкание никакого элемента $\mathfrak{U}$ не пересекается с B, замыкание никакого элемента $\mathfrak{B}$ не пересекается с A и $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ — подсемейства элементов σ-локально конечной базы N. Таким образом, $\mathfrak{U} = \bigcup\{\mathfrak{U}_n : n \in \omega\}$ и $\mathfrak{B} = \bigcup\{\mathfrak{B}_n : n \in \omega\}$, где $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{B}_n$ — локально конечные семейства. Положим $U_n = \bigcup\{W : W \in \mathfrak{U}_n\}$ и $V_n = \bigcup\{W : W \in \mathfrak{B}_n\}$. Тогда $\overline{U}_n = \bigcup\{\overline{W} : W \in \mathfrak{U}_n\}$ и, значит, множество $\overline{U}_n$ не пересекается с множеством B; аналогично доказывается, что $\overline{V}_n$ не пересекается с A. Это — в точности та ситуация, которая встретилась нам в доказательстве леммы 4.1; как и там, завершим доказательство, положив $U_n' = U_n \setminus \bigcup\{\overline{V}_k : k \leqslant n\}$, $V_n' = V_n \setminus \bigcup\{\overline{U}_k : k \leqslant n\}$. Объединение множеств U_n' и объединение множеств V_n' — искомые непересекающиеся окрестности множеств A и B соответственно.

Следующая лемма завершает доказательство достаточности перечисленных в формулировке теоремы 4.18 условий для метризуемости пространства.

20. Лемма. *Регулярное T_1-пространство, обладающее σ-локально конечной базой, метризуемо.*

Доказательство. Будет показано, что на пространстве X существует счетное семейство D псевдометрик, каждая из которых непрерывна на $X \times X$, такое, что, каковы бы ни были замкнутое подмножество A пространства X и точка $x \in X \setminus A$, d-расстояние от x до A относительно некоторой псевдометрики $d \in D$ положительно. Этим метризуемость пространства X будет доказана. В самом деле, отображение пространства X на псевдометрическое пространство (X, d) при любом выборе d из D непрерывно; теперь утверждения 4.5 и 4.14 применяются так же, как при доказательстве теоремы Урысона. Таким образом, задача состоит в построении семейства D с нужными свойствами. Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-локально конечная база топологии пространства X, и предположим, что $\mathfrak{B} = \bigcup \{\mathfrak{B}_n : n \in \omega\}$, где каждое $\mathfrak{B}_n$ — локально конечное семейство множеств. Для каждой упорядоченной пары целых чисел m и n и произвольного элемента U семейства $\mathfrak{B}_m$ обозначим через U' объединение тех элементов семейства $\mathfrak{B}_n$, замыкания которых содержатся в U. В силу локальной конечности $\mathfrak{B}_n$ замыкание множества U' содержится в U. Из теорем 4.19 и 4.4 следует, что существует непрерывное отображение f_U пространства X в отрезок $[0,1]$, переводящее множество U' в единицу и множество $X \setminus U$ в нуль. Положим $d(x, y) = \Sigma\{|f_U(x) - f_U(y)| : U \in \mathfrak{B}_m\}$. Непрерывность функции d на $X \times X$ — непосредственное следствие локальной конечности системы $\mathfrak{B}_m$. Пусть, наконец, D — семейство всех псевдометрик, полученных таким образом. Так как каждой паре целых чисел соответствует ровно одна из них, то D счетно. Рассмотрим замкнутое множество $A \subset X$ и точку $x \in X \setminus A$. Тогда для некоторого m и некоторого $U \in \mathfrak{B}_m$ будет $x \in U \subset X \setminus A$, и для некоторого n и некоторого $V \in \mathfrak{B}_n$ будет $x \in V \subset \overline{V} \subset U$. Ясно, что d-расстояние от точки x до множества A относительно псевдометрики, соответствующей паре $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_n$, не меньше единицы.

Осталось провести наиболее интересную часть доказательства метризационной теоремы. Мы должны доказать, что каждое метрическое пространство обладает σ-дискретной базой. Имеет место более сильный результат; позднее он все равно нам понадобится, поэтому мы его сейчас сформулируем, а для этого введем одно новое понятие. Покрытие $\mathfrak{B}$ множества X называется *измельчением* *) покрытия $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда каждый элемент покрытия $\mathfrak{B}$ содержится в некотором элементе семейства $\mathfrak{A}$. Например, в метрическом пространстве семейство всех открытых шаров радиуса половина является измельчением семейства всех открытых шаров радиуса единица. Следующая теорема утверждает, что в любое открытое покрытие псевдометрического пространства можно вписать σ-дискретное открытое покрытие. Отсюда следует, что у каждой псевдометрической топологии есть σ-дискретная база, ибо в каждое покрытие пространства открытыми шарами радиуса $\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \ldots$, можно вписать σ-дискретное покрытие $\mathfrak{B}_n$; объединение семейств $\mathfrak{B}_n$ образует σ-дискретную базу. Этим завершается доказательство метризационной теоремы 4.18.

21. Теорема. *В каждое открытое покрытие псевдометризуемого пространства можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное открытое покрытие псевдометрического пространства (X, d). Первый шаг доказательства теоремы заключается в разбиении каждого элемента U семейства $\mathfrak{U}$ на «концентрические диски». Для каждого положительного целого числа n и каждого элемента U из $\mathfrak{U}$ обозначим через U_n множество всех тех точек $x \in U$, для которых $\operatorname{dist}[x, X \setminus U] \geqslant 2^{-n}$. Из неравенства треугольника ясно, что $\operatorname{dist}[U_n, X \setminus U_{n+1}] \geqslant 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}$. Вполне упорядочим семейство $\mathfrak{U}$ каким-нибудь отношением $<$ (см. 0.25, (з)), и для каждого положительного целого числа n и любого элемента U из $\mathfrak{U}$ положим $U_n^* = U_n \setminus \bigcup \{V_{n+1} : V \in \mathfrak{U}$

*) В русской литературе принято писать в этом случае, что покрытие $\mathfrak{B}$ вписано в покрытие $\mathfrak{A}$. (*Прим. перев.*).

и $V < U\}$. Для любой пары элементов U из V и $\mathfrak{U}$ и любого целого положительного n верно одно из двух соотношений: либо $U_n^* \subset X \setminus V_{n+1}$, либо $V_n^* \subset X \setminus U_{n+1}$, в зависимости от того, предшествует U элементу V или следует за ним. В любом случае $\operatorname{dist}[U_n^*, V_n^*] \geqslant 2^{-n-1}$. Следовательно, если определить $\tilde{U}_n$ как множество всех точек x, лежащих от U_n^* на расстоянии, меньшем 2^{-n-3}, то $\operatorname{dist}[\tilde{U}_n, \tilde{V}_n] \geqslant 2^{-n-2}$. Значит, для каждого фиксированного n семейство всех множеств вида $\tilde{U}_n$ дискретно. Обозначим через $\mathfrak{V}$ семейство всех $\tilde{U}_n$ для всех целых $n > 0$ и всех $U \in \mathfrak{U}$. Оно является открытым покрытием пространства X, ибо если U — первый элемент покрытия $\mathfrak{U}$, содержащий x, то непременно $x \in \tilde{U}_n$ для некоторого n. Очевидно, $\tilde{U}_n \subset U$, следовательно, $\mathfrak{V}$ — вписанное в $\mathfrak{U}$ σ-дискретное открытое покрытие пространства X.

22. Замечания. На самом деле есть две метризационные проблемы. Топологическая задача только что была рассмотрена. Задача метризации равномерных пространств будет рассмотрена в главе 6 (там она формулируется и дается историческая справка). Любопытно, что удовлетворительное решение этой второй задачи было найдено значительно раньше, чем удовлетворительное решение топологической задачи. Хотя теорема Урысона и касалась только специального случая, долгое время она оставалась наилучшей теоремой этого рода. Достигнутое сейчас решение метризационной задачи, которое можно признать вполне достаточным *), было подготовлено двумя работами. Дьедонне [1] начал **)

---

*) В настоящее время метризационная проблема получила качественно другое решение по крайней мере в двух различных направлениях. Одно из них дано в работах Джонса [1], Стоуна [5] и Архангельского [1], [3]. Оно основывается на понятии звездного измельчения и восходит к самому первому метризационному критерию П. С. Александрова и Урысона (см. [2]), несправедливо обойденному в этих замечаниях (см. также работы Бинга [1], Пономарева [2] и П. С. Александрова [7]. Другое решение найдено в работах П. С. Александрова [7] и Архангельского [2]).

**) Через 20 лет после того, как локально конечные покрытия были определены П. С. Александровым. См. сноску на стр. 172. (*Прим. перев.*)

изучать пространства, в каждое открытое покрытие которых можно вписать локально конечное открытое покрытие (паракомпактные пространства; см. главу 5). А. Стоун [1] доказал, что каждое метризуемое пространство паракомпактно (специальный случай этой теоремы был ранее получен Даукером [1]). Характеристика метризуемых пространств в терминах σ-локально конечной базы была затем замечена рядом математиков, в частности, Нагатой [1] и Ю. М. Смирновым [1]. Характеристика посредством σ-дискретной базы принадлежит Бингу [1]. Доказательство необходимости условий теоремы 4.21, по существу, является начальным фрагментом стоуновского доказательства паракомпактности.

Ю. М. Смирнов [2] показал также, что локально метризуемое паракомпактное пространство метризуемо.

В заключение скажем несколько слов о роли псевдометризуемых пространств. Возникающие в анализе пространства чаще бывают псевдометрическими, чем метрическими. Даже при решении задачи метризации оказалось удобным предварительно построить ряд псевдометрик. Конечно, всегда можно перейти от псевдометрического пространства к соответствующему метрическому (теорема 4.15), однако необходимость все время обращаться к фактор-пространству быстро утомляет. К тому же условие: $d(x, y)=0$ эквивалентно $x=y$ — чаще всего является излишним. Но работать исключительно с псевдометриками тоже не всегда удобно — например, если надо построить топологическое отображение.

ЗАДАЧИ

А. Регулярные пространства

(а) Пусть X — регулярное пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех его подмножеств вида $\overline{\{x\}}$, где $x \in X$. Тогда $\mathfrak{D}$ — разбиение пространства X, причем естественное проектирование пространства X на фактор-пространство $\mathfrak{D}$ одновременно открыто и замкнуто, а само фактор-пространство является регулярным хаусдорфовым пространством. (Если A — открытое или замкнутое подмножество пространства X, то $\overline{\{x\}} \subset A$ для любой точки x из A.)

(б) Произведение регулярных пространств — регулярное пространство.