изучать пространства, в каждое открытое покрытие которых можно вписать локально конечное открытое покрытие (паракомпактные пространства; см. главу 5). А. Стоун [1] доказал, что каждое метризуемое пространство паракомпактно (специальный случай этой теоремы был ранее получен Даукером [1]). Характеристика метризуемых пространств в терминах σ-локально конечной базы была затем замечена рядом математиков, в частности, Нагатой [1] и Ю. М. Смирновым [1]. Характеристика посредством σ-дискретной базы принадлежит Бингу [1]. Доказательство необходимости условий теоремы 4.21, по существу, является начальным фрагментом стоуновского доказательства паракомпактности.

Ю. М. Смирнов [2] показал также, что локально метризуемое паракомпактное пространство метризуемо.

В заключение скажем несколько слов о роли псевдометризуемых пространств. Возникающие в анализе пространства чаще бывают псевдометрическими, чем метрическими. Даже при решении задачи метризации оказалось удобным предварительно построить ряд псевдометрик. Конечно, всегда можно перейти от псевдометрического пространства к соответствующему метрическому (теорема 4.15), однако необходимость все время обращаться к фактор-пространству быстро утомляет. К тому же условие: $d(x, y)=0$ эквивалентно $x=y$ — чаще всего является излишним. Но работать исключительно с псевдометриками тоже не всегда удобно — например, если надо построить топологическое отображение.

ЗАДАЧИ

А. Регулярные пространства

(а) Пусть X — регулярное пространство и $\mathfrak{D}$ — семейство всех его подмножеств вида $\overline{\{x\}}$, где $x \in X$. Тогда $\mathfrak{D}$ — разбиение пространства X, причем естественное проектирование пространства X на фактор-пространство $\mathfrak{D}$ одновременно открыто и замкнуто, а само фактор-пространство является регулярным хаусдорфовым пространством. (Если A — открытое или замкнутое подмножество пространства X, то $\overline{\{x\}} \subset A$ для любой точки x из A.)

(б) Произведение регулярных пространств — регулярное пространство.

Б. Непрерывные отображения метрических пространств

Отображение f псевдометрического пространства (X, d) в псевдометрическое пространство (Y, e) непрерывно тогда и только тогда, когда для каждой точки x из X и любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что $e(f(x), f(y))<\varepsilon$ при $d(x, y)<\delta$.

В. Упражнение на метрики

Пусть f — непрерывная неубывающая вещественная функция, определенная на множестве всех неотрицательных вещественных чисел и удовлетворяющая условиям: $f(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$, и $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$ при всех неотрицательных x и y. (Функции, для которых выполняется последнее условие, называются *субаддитивными*.) Пусть (X, d) — метрическое пространство, $e(x, y)=f(d(x, y))$. Тогда (X, e) — метрическое пространство, топология которого совпадает с топологией пространства (X, d). (В литературе часто встречается случай, когда $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$.)

Г. Хаусдорфова метрика на множестве подмножеств

Пусть (X, d) — некоторое метрическое пространство конечного диаметра и $\mathfrak{A}$ — семейство всех его замкнутых подмножеств. Для $r>0$ и A из $\mathfrak{A}$ положим $V_r(A)=\{x : \operatorname{dist}(x, A)<r\}$, и для каждой пары элементов A и B семейства $\mathfrak{A}$ положим $d'(A, B)=\inf\{r : A\subset V_r(B)$ *и* $B\subset V_r(A)\}$. Функция d' называется хаусдорфовой метрикой; значение ее на паре множеств далеко не то же самое, что расстояние между ними, которое рассматривалось раньше.

(а) $(\mathfrak{A}, d')$ — метрическое пространство, причем отображение, в силу которого точке $x\in X$ соответствует элемент $\{x\}\in\mathfrak{A}$, является изометрией пространства X на подпространство пространства $\mathfrak{A}$.

(б) Топология, которая порождается хаусдорфовой метрикой на $\mathfrak{A}$, не определяется метрической топологией на X. Например, пусть X — множество всех положительных вещественных чисел; положим $d(x, y)=\left|\dfrac{x}{1+x}-\dfrac{y}{1+x}\right|$, и пусть $e(x, y)=\min[1, |x-y|]$. В этом случае метрические топологии пространств (X, d) и (X, e) совпадают, но топологии метрических пространств $(\mathfrak{A}, d')$ и $(\mathfrak{A}, e')$ различны. (В $(\mathfrak{A}, d')$ множество всех положительных чисел является предельной точкой для семейства всех его конечных подмножеств.)

Замечание. Дальнейшие сведения (и библиографию) можно почерпнуть в статье Майкла [2].

Д. Пример (порядковые числа) произведения нормальных пространств

Произведение нормальных пространств не обязательно нормально *). Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших пер-

---

*) Более эффективное решение части этой задачи можно получить, опираясь на методы следующей главы. Однако изложенные здесь факты вскоре нам понадобятся. Я думаю, что этот пример был независимо построен Дьедонне и Морсом.

вого несчетного трансфинита Ω, и $\Omega'=\Omega_0\cup\{\Omega\}$. Каждое из этих множеств возьмем с порядковой топологией.

(а) Лемма о чередующихся последовательностях. Пусть $\{x_n, n\in\omega\}$ и $\{y_n, n\in\omega\}$ — две такие последовательности в Ω_0, что $x_n\leqslant y_n\leqslant x_{n+1}$ при каждом n. Тогда обе они сходятся в Ω_0, причем к одной точке.

(б) Если A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства Ω_0, то точка Ω не может быть предельной в Ω' для множеств A и B одновременно.

(в) Пространства Ω_0 и Ω' нормальны. (Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества одного из этих пространств и первая точка множества $A\cup B$ принадлежит A; найдите конечную последовательность точек a_0, b_0, a_1, $\ldots$, a_n (или b_n) такую, что для каждого i $a_i\in A$, $b_i\in B$, между a_i и b_i нет точек из A, а между b_i и a_{i+1} нет точек из B. Интервалы $(a_i, b_i]$ одновременно открыты и замкнуты.)

(г) Пусть f — такое отображение пространства Ω_0 в Ω_0, что $f(x)\geqslant x$ при каждом x Тогда при некотором $x\in\Omega_0$ точка (x, x) является предельной для графика отображения f. (Постройте по индукции последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условию $x_{n+1}=f(x_n)$; покажите, что $x_n\leqslant f(x_n)\leqslant x_{n+1}$, и примените лемму о чередующихся последовательностях.)

(д) Произведение $\Omega_0\times\Omega'$ не нормально. (Пусть A — множество всех точек вида (x, x) и $B=\Omega_0\times\{\Omega\}$. Рассмотрим произвольную окрестность U множества A и обозначим через $f(x)$ наименьшее порядковое число, большее, чем x, для которого $(x, f(x))\notin\bar{U}$. Теперь можно сослаться на (г).)

Е. Пример (плоскость Тихонова), касающийся подпространств нормальных пространств

Подпространство нормального пространства может не быть нормальным. Пусть Ω' — множество всех порядковых чисел, не превосходящих первого несчетного порядкового числа Ω, и пусть ω' — множество всех порядковых чисел, не превосходящих первого бесконечного порядкового числа ω. Наделим эти множества порядковыми топологиями. Произведение $\Omega'\times\omega'$ называется *плоскостью Тихонова*. Нетрудно непосредственно проверить, что плоскость Тихонова — нормальное пространство. Впрочем, этот факт является немедленным следствием одной общей теоремы из следующей главы. Положим $X=(\Omega'\times\omega')\setminus\{(\Omega, \omega)\}$, так что X получается из плоскости Тихонова путем удаления «угловой» точки. Обозначим через A множество всех точек пространства X, первая координата которых есть Ω, и через B — множество всех точек пространства X, вторая координата которых есть ω. У множеств A и B нет непересекающихся окрестностей в X. (Пусть U — окрестность множества A; для каждого $x\in\omega$ обозначим через $f(x)$ первое порядковое число, для которого из $y>f(x)$ следует, что $(y, x)\in U$. Наименьшая верхняя грань значений функции f (в Ω') меньше Ω.)

Ж. Пример: произведения фактор-пространств и нерегулярных хаусдорфовых пространств

Пусть X — какое-нибудь ненормальное регулярное хаусдорфово пространство и A, B — такие его непересекающиеся замкнутые подмножества, что любая окрестность множества A пересекает любую окрестность множества B. Обозначим через Δ множество всех (x, x), где $x \in X$ (Δ — тождественное отношение на X).

(а) Положим $R = \Delta \cup (A \times A)$. Множество R замкнуто в $X \times X$, а фактор-пространство X/R хаусдорфово, но не регулярно. (Элементами этого фактор-пространства служат множество A и множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus A$.)

(б) Положим $S = \Delta \cup (A \times A) \cup (B \times B)$. Множество S замкнуто в пространстве $X \times X$, однако фактор-пространство X/S не удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. (Элементами пространства X/S служат множества A, B и все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus (A \cup B)$.)

(в) Имеет место естественное отображение пространства $X \times X$ на пространство $(X/S) \times (X/S)$, которое переводит (x, y) в $(S[x], S[y])$. Естественно спросить, будет ли это отображение открытым, если X/S наделить фактор-топологией, а $(X/S) \times (X/S)$ и $X \times X$ снабдить топологией произведения. (Это эквивалентно вопросу о том, совпадает ли произведение фактор-топологий с соответствующей фактор-топологией произведения *)). Если S — отношение, определенное в (б), то отображение, о котором идет речь, не является открытым. (Рассмотрите окрестность $X \times X \setminus (A \times A \cup B \times B \cup \Delta)$ множества $A \times B$.)

З. Наследственные свойства, инвариантные относительно умножения и деления

Свойство P топологического пространства называется *наследственным* тогда и только тогда, когда каждое подпространство любого пространства, обладающего свойством P, само обладает свойством P. Говорят, что свойство P *инвариантно относительно умножения,* в том и лишь в том случае, когда произведение двух пространств со свойством P обладает свойством P. Говорят, что свойство P *делимо*, тогда и только тогда, когда фактор-пространство каждого пространства со свойством P обладает свойством P. Рассмотрим следующие свойства: T_1, Х — хаусдорфовость, Р — регулярность, ПР — полная регулярность, Т — тихоновость, Н — нормальность, С — связность, S — сепарабельность, C_I — первая аксиома счетности, C_{II} — вторая аксиома счетности, М — метризуемость

---

*) На самом деле эти вопросы не эквивалентны и второй естественнее первого. (Пусть X — отрезок $[0,1]$ и A — отрезок $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$; тогда отображение $X \times X \to X/A \times X/A$ не открыто, но замкнуто и является фактор-отображением. Значит, здесь произведение фактор-топологий равносильно фактор-топологии произведения.) (*Прим. перев.*

и Л — линделёфовость. Следующая таблица заполнена знаками + и —; они ставились в зависимости от того, принадлежит ли к названному слева типу свойство, возглавляющее соответствующий столбец. Приведите примеры (большинство нужных теперь примеров уже встречалось нам в задачах) и доказательства, подтверждающие правильность этой таблицы.

	T_1	Х	Р	ПР	Т	Н	С	S	$С_{\mathrm{I}}$	$С_{\mathrm{II}}$	М	Л
Наследственно	+	+	+	+	+	—	—	—	+	+	+	—
Инвариантно относительно умножения	+	+	+	+	+	—	+	—	—	—	—	—
Делимо	—	—	—	—	—	—	+	+	—	—	—	+

Таблица будет выглядеть совсем иначе, если мы ограничимся одними замкнутыми подпространствами или одними открытыми отображениями.

И. Стрелка (пространство полуоткрытых интервалов)

Пусть X — множество всех вещественных чисел с топологией, базой которой служит семейство всех полуоткрытых интервалов $[a, b)$; см. 1.Л и 1.М. Тогда:

(а) X регулярно.

(б) X нормально. (Напомним, что каждое открытое покрытие пространства X содержит счетное подпокрытие.)

(в) Пространство произведения $X \times X$ не нормально. (Пусть $Y = \{(x, y) : x + y = 1\}$, A — множество всех элементов из Y, первая координата которых иррациональна, и $B = Y \setminus A$. Предположим, что U и V — непересекающиеся окрестности множеств A и B, и пусть $f(x) = \sup\{e : [x+e) \times [1 - x + e) \subset U\}$ для x из A. Отображение f можно рассматривать как вещественную функцию, определенную на множестве всех иррациональных чисел, нигде не равную нулю. Противоречие получается из-за того, что для некоторого целого $n > 0$ существует рациональная точка, являющаяся предельной для множества $\left\{x : f(x) \geqslant \frac{1}{n}\right\}$. Последнее немедленно следует из теоремы: пространство вещественных чисел (в обычной топологии) является множеством второй категории (см. главу 7). Непосредственное доказательство нужного нам факта выглядело бы довольно неуклюжим.)

Замечание. Этот пример принадлежит Зоргенфрею [1].

К. Множество нулей вещественной непрерывной функции

Подмножество топологического пространства называется множеством типа G_δ тогда и только тогда, когда оно является пересечением некоторого счетного семейства открытых множеств.

(а) Пусть f — непрерывная вещественная функция на топологическом пространстве X; тогда $f^{-1}[0]$ — множество типа G_δ. (Ибо множество $\{0\}$ имеет тип G_δ в пространстве вещественных чисел.)

(б) Для любого замкнутого множества типа G_δ в нормальном топологическом пространстве X найдется непрерывная вещественная функция f на X такая, что $A=f^{-1}[0]$.

Л. Совершенно нормальные пространства *)

Топологическое пространство называется *совершенно нормальным* тогда и только тогда, когда оно нормально и каждое замкнутое в нем множество имеет тип G_δ.

(а) Каждое псевдометризуемое пространство совершенно нормально.

(б) Произведение несчетного множества единичных интервалов не совершенно нормально. (Множества типа G_δ в этом пространстве не могут состоять из одной точки.)

М. Характеристика вполне регулярных пространств **)

Топологическое пространство вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно подпространству произведения псевдометрических пространств.

Н. Непрерывные разбиения нормальных пространств

Образ нормального пространства при замкнутом непрерывном отображении является нормальным пространством.

---

*) Совершенно нормальные пространства были впервые определены и исследованы в работе П. С. Александрова и Урысона [2] под другим названием (см. стр. 893). *(Прим. перев.)*

**) Напомним, что в принятой у Келли терминологии вполне регулярное пространство может не быть T_1-пространством, т. е. может не быть тихоновским пространством. *(Прим. перев.)*