*Глава 5*

# БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие бикомпактного топологического пространства (как и многие другие понятия, рассматриваемые в этой книге) возникло в результате абстракции от некоторых важных свойств пространства вещественных чисел. Классическая теорема Гейне — Бореля — Лебега утверждает, что каждое открытое покрытие произвольного замкнутого ограниченного подмножества пространства вещественных чисел содержит конечное подпокрытие. У этой теоремы есть необычайно глубокие следствия. С ней произошло то же, что и с большинством хороших теорем: заключение ее стало определением *). Топологическое пространство называется *бикомпактным* в том и только в том случае, когда из каждого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие **). Про подмножество $A$ топологического пространства говорят, что оно бикомпактно, тогда и только тогда, когда оно бикомпактно в индуцированной топологии, или, что равносильно, когда каждое его покрытие открытыми множествами в $X$ содержит конечное подпокрытие.

## ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В этом параграфе бикомпактность характеризуется в терминах замкнутых множеств, сходимости, баз и предбаз.

---

*) Жаль, что автор не отмечает здесь, что совершилось это не само собой, а при решающем участии П. С. Александрова. Напомним также, что теория бикомпактных топологических пространств впервые построена в работе П. С. Александрова и Урысона [2]. *(Прим. перев.)*

**) Пространство называется *компактным*, если из любого его счетного открытого покрытия можно выбрать конечное. Бывают еще секвенциально-компактные и псевдокомпактные пространства (см. задачи в конце главы). *(Прим. перев.)*

Семейство $\mathfrak{A}$ множеств называется *центрированным* тогда и только тогда, когда пересечение любого конечного множества элементов этого семейства не пусто. Формулы де Моргана (0.2), касающиеся перехода к дополнению, помогают установить связь между понятием центрированной системы и понятием бикомпактности.

1. Теорема. *Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда каждая центрированная система замкнутых в нем множеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств топологического пространства $X$. Согласно формуле де Моргана $X \setminus \bigcup \{A : A \in \mathfrak{A}\} = \bigcap \{X \setminus A : A \in \mathfrak{A}\}$. Значит, $\mathfrak{A}$ покрывает $X$ тогда и только тогда, когда пересечение дополнений к элементам из $\mathfrak{A}$ пусто. Бикомпактность пространства $X$ равносильна требованию, чтобы каждое семейство открытых множеств, никакое конечное подсемейство которого не покрывает $X$, само не покрывало пространства $X$, — а это требование, очевидно, совпадает с требованием того, чтобы каждое центрированное семейство замкнутых множеств имело непустое пересечение.

2. Теорема. *Топологическое пространство $X$ бикомпактно тогда и только тогда, когда каждая направленность в $X$ имеет предельную точку.*

*Следовательно, $X$ бикомпактно в том и только в том случае, когда каждая направленность в $X$ обладает поднаправленностью, сходящейся к некоторой точке пространства $X$.*

Доказательство. Пусть $\{S_n, n \in D\}$ — некоторая направленность в бикомпактном топологическом пространстве $X$. Для каждого $n$ из $D$ обозначим через $A_n$ множество всех точек $S_m$, для которых $m \geqslant n$. Семейство всех множеств $A_n$ центрировано, ибо множество $D$ направлено отношением $\geqslant$. Тем более центрировано семейство всех их замыканий — множеств $\bar{A}_n$. Так как $X$ бикомпактно, то существует точка $s$, общая для всех $\bar{A}_n$. В соответствии с теоремой 2.7 каждая такая точка $s$ является предельной точкой направленности $\{S_n, n \in D\}$. Докажем обратное утверждение. Пусть $X$ — топологическое пространство, в котором каждая направленность имеет предельную точку, пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное центрированное семейство его замкнутых подмножеств. Определим $\mathfrak{B}$ как семейство всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{A}$. Семейство $\mathfrak{B}$ центрировано; так как $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$, то достаточно показать, что $\bigcap \{B : B \in \mathfrak{B}\}$ не пусто. Пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{B}$ принадлежит ему; таким образом, семейство $\mathfrak{B}$ направлено отношением включения $\subset$. Если выбрать из каждого $B \in \mathfrak{B}$ по точке $S_B$, то получим направленность в $X$. У нее по предположению есть некоторая предельная точка $s$. Если элементы $B$ и $C$ семейства $\mathfrak{B}$ таковы, что $C \subset B$, то $S_C \in C \subset B$. Значит, направленность $\{S_B, B \in \mathfrak{B}\}$ с некоторого момента находится в замкнутом множестве $B$, а потому ее предельная точка $s$ принадлежит $B$. Итак, точка $s$ принадлежит каждому элементу семейства $\mathfrak{B}$. Значит, пересечение элементов семейства $\mathfrak{B}$ не пусто. Наконец, второе утверждение теоремы 5.2 вытекает из того (2.6), что точка является предельной точкой направленности в том и только в том случае, когда некоторая поднаправленность последней сходится к этой точке.

Иногда оказывается возможным описать бикомпактность в терминах предельных точек подмножеств. Когда это бывает — выясняют расположенная ниже последовательность лемм и заключающая ее теорема. Задачи в конце главы показывают, что наложенные ограничения необходимы. Чтобы результаты формулировались лучше, мы выделим одну разновидность понятия предельной точки. Точка $x$ называется *$\omega$-предельной точкой* (для) множества $A$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки $x$ содержит бесконечно много точек множества $A$. Каждая $\omega$-предельная точка множества является его предельной точкой. Если пространство удовлетворяет $T_1$-аксиоме отделимости, то верно и обратное утверждение.

**3.** Лемма. *В топологическом пространстве у каждой последовательности есть предельная точка в том и только в том случае, когда каждое бесконечное подмножество этого пространства обладает в нем $\omega$-предельной точкой.*

Доказательство. Предположим, что у каждой последовательности есть предельная точка, и пусть $A$ — бесконечное множество. Тогда существует последовательность элементов множества $A$, все элементы которой попарно различны (взаимно однозначная последовательность). Ясно, что каждая предельная точка этой последовательности является $\omega$-предельной точкой для множества $A$. Обратно, если каждое бесконечное подмножество топологического пространства обладает $\omega$-предельной точкой и $\{S_n, n \in \omega\}$ — какая-нибудь последовательность в этом топологическом пространстве, то верно одно из двух: либо область значений этой последовательности бесконечна, — тогда любая $\omega$-предельная точка для этого множества является предельной точкой рассматриваемой последовательности, — либо область значений последовательности конечна. В последнем случае для некоторой точки $x$ будет $S_n = x$ для бесконечного множества целых положительных $n$. Тогда $x$ — предельная точка последовательности $\{S_n, n \in \omega\}$.

4. Лемма. *Если $X$ — линделёфово пространство и каждая последовательность в $X$ имеет предельную точку, то $X$ бикомпактно.*

Доказательство. Надлежит показать, что каждое открытое покрытие пространства $X$ содержит конечное подпокрытие. По условию леммы можно считать, что рассматриваемое покрытие состоит из множеств $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, где $n \in \omega$. Будем действовать по индукции. Положим $B_0 = A_0$ и для произвольного $p \in \omega$ определим $B_p$ как первое среди тех множеств $A_n$, которые не покрыты совокупностью элементов $B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}$. Если в какой-то момент такой выбор осуществить невозможно, то уже построенные $B_i$ образуют искомое конечное подпокрытие. В противном случае можно в каждом $B_p$, $p \in \omega$, выбрать по точке $b_p$ так, чтобы было $b_p \notin B_i$ при $i < p$. Пусть $x$ — какая-нибудь предельная точка полученной последовательности. Тогда $x \in B_p$ для некоторого $p$, и так как $x$ — предельная точка, то $b_q \in B_p$ для некоторого $q > p$. Но это ведет к противоречию.

В формулировке следующей теоремы суммируются сведения о взаимоотношениях понятий последовательности, подпоследовательности, предельной точки и бикомпактности.

5. Теорема. *Пусть $X$ — топологическое пространство. Тогда условия, выписанные ниже, относятся между собой следующим образом. Для всех пространств* (а) *эквивалентно* (б) *и из* (г) *следует* (а). *Для пространств с первой аксиомой счетности эквивалентны условия* (а), (б) *и* (в). *Для пространств со счетной базой все четыре условия равносильны. Если $X$ — псевдометрическое пространство, то из каждого из четырех выписанных условий вытекает, что $X$ имеет счетную базу, и следуют остальные три условия.*

(а) *Каждое бесконечное подмножество пространства $X$ имеет в $X$ $\omega$-предельную точку.*

(б) *Каждая последовательность в $X$ имеет предельную точку.*

(в) *В каждой последовательности элементов пространства $X$ есть подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из $X$.*

(г) *Пространство $X$ бикомпактно.*

Доказательство. Из леммы 5.3 следует, что условия (а) и (б) эквивалентны, а так как каждая последовательность является направленностью, то теорема 5.2 показывает, что из (г) всегда следует (б). Для пространств с первой аксиомой счетности условия (б) и (в) эквивалентны в силу теоремы 2.8. Если $X$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из каждого открытого покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. Применяя лемму 5.4, получаем, что все четыре утверждения об $X$ в этом случае эквивалентны. Если $X$ — псевдометрическое пространство, то в $X$ выполнена первая аксиома счетности и потому первые три условия эквивалентны, причем каждое из них следует из бикомпактности. Поэтому теорема будет доказана, если мы обнаружим, что псевдометрическое пространство, в котором для каждого бесконечного подмножества есть предельная точка, сепарабельно и, следовательно, обладает счетной базой. Пусть $X$ — такое псевдометрическое пространство. Для произвольного положительного $r$ рассмотрим семейство всех множеств $A$, в которых расстояние между любыми двумя точками не меньше $r$. В силу

0.25 легко видеть, что в этом семействе есть максимальный элемент $A_r$. Множество $A_r$ непременно конечно, ибо $\frac{r}{2}$-шар с центром в произвольной точке пространства $X$ может содержать не более одного элемента множества $A_r$, что означает, что у $A_r$ нет ни одной предельной точки в $X$. Далее, $r$-шар с центром в любой точке $x \in X$ непременно пересекает множество $A_r$ в силу максимальности $A_r$; в противном случае точку $x$ можно было бы присоединить к $A_r$. Наконец, объединение $A$ множеств $A_r$, где $r$ пробегает множество чисел, обратных к целым положительным числам, несомненно, счетно и плотно в $X$.

Если $\mathfrak{B}$ — база топологии бикомпактного пространства $X$ и $\mathfrak{A}$ — покрытие пространства $X$ элементами этой базы, то в $\mathfrak{A}$ найдется конечное подпокрытие. Обратно, предположим, что $\mathfrak{B}$ — база некоторой топологии на $X$ и что каждое покрытие $X$ элементами базы $\mathfrak{B}$ содержит конечное подпокрытие. Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольное открытое покрытие пространства $X$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех элементов базы $\mathfrak{B}$, являющихся подмножествами элементов покрытия $\mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{B}$ — база, то $\mathfrak{A}$ покрывает $X$ и в $\mathfrak{A}$ по предположению существует конечное подпокрытие $\mathfrak{A}'$. Для каждого элемента семейства $\mathfrak{A}'$ можно в $\mathfrak{C}$ выбрать содержащий его элемент. В результате получим конечное подпокрытие, принадлежащее $\mathfrak{C}$. Это означает, что «если база топологии удовлетворяет условию бикомпактности, то пространство бикомпактно». Это полезный, но не очень глубокий результат. Глубже и полезнее соответствующая теорема о предбазах.

**6.** Теорема (Александер). *Если $\mathfrak{S}$ — такая предбаза топологии пространства $X$, что из любого покрытия $X$ элементами $\mathfrak{S}$ можно выбрать конечное подпокрытие, то пространство $X$ бикомпактно.*

Доказательство. Условимся ради краткости называть семейство подмножеств пространства $X$ неполноценным тогда и только тогда, когда оно не покрывает $X$, и конечно неполноценным тогда и только тогда, когда никакое его конечное подсемейство не покрывает $X$. Тогда условие бикомпактности пространства $X$ можно переформулировать следующим образом: каждое конечно неполноценное семейство открытых подмножеств пространства $X$ неполноценно. Заметьте, что класс конечно неполноценных семейств открытых множеств имеет конечный характер. Поэтому каждое конечно неполноценное семейство содержится в некотором максимальном семействе в силу леммы Тьюки 0.25, (в). Каждое максимальное конечно неполноценное семейство $\mathfrak{A}$ обладает специальным свойством *): если $C \notin \mathfrak{A}$ и множество $C$ открыто, то в силу максимальности $\mathfrak{A}$ существует конечное подсемейство $A_1, \ldots, A_m$ элементов $\mathfrak{A}$ такое, что $C \cup A_1 \cup \ldots \cup A_m = X$. Следовательно, никакое открытое множество, содержащее множество $C$, не принадлежит семейству $\mathfrak{A}$. Если $D$ — еще одно открытое множество, не принадлежащее $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ существуют $B_1, \ldots, B_n$ такие, что $D \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n = X$. При этом, как показывает простое теоретико-множественное вычисление, $(C \cap D) \cup \cup A_1 \cup \ldots \cup A_m \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n = X$. Значит, $C \cap D \notin \mathfrak{A}$. Следовательно, если ни один элемент конечного семейства открытых множеств не принадлежит $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ не входит и никакое открытое множество, которое содержит пересечение элементов этого семейства. Иначе говоря, если некоторый элемент из $\mathfrak{A}$ содержит пересечение $C_1 \cap \ldots \cap C_p$ конечного числа открытых множеств, то непременно какое-нибудь из них входит в $\mathfrak{A}$.

Теперь наша теорема доказывается непосредственно. Пусть $\mathfrak{S}$ — такая предбаза, что каждое покрытие пространства ее элементами содержит конечное подпокрытие (т. е. каждое конечно неполноценное подсемейство этой предбазы неполноценно). Рассмотрим произвольное конечно неполноценное семейство $\mathfrak{B}$ открытых подмножеств пространства $X$. Тогда существует максимальное конечно неполноценное семейство $\mathfrak{A}$ открытых множеств, содержащее $\mathfrak{B}$. Достаточно показать, что $\mathfrak{A}$ неполноценно. Семейство $\mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}$, состоящее из тех элементов семейства $\mathfrak{A}$, которые принадлежат предбазе $\mathfrak{S}$, конечно неполноценно и потому не покрывает пространства $X$. Следовательно, теорема будет доказана, если мы установим, что каждая точка множества $\cup\{A : A \in \mathfrak{A}\}$

*) Результат задачи 2.1 — в точности то, что нам нужно сейчас.

принадлежит множеству $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}\}$. Так как $\mathfrak{S}$ — предбаза, то каждая точка $x$ из произвольного элемента $A$ семейства $\mathfrak{A}$ принадлежит пересечению некоторого конечного множества элементов семейства $\mathfrak{S}$, лежащему целиком в $A$. В предыдущем абзаце мы выяснили, что тогда некоторый элемент из этого семейства входит в $\mathfrak{A}$. Значит, $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\} = \bigcup\{A : A \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}\}$, и теорема доказана.

## БИКОМПАКТНОСТЬ И АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

В этом параграфе мы изучим следствия бикомпактности, взятой вместе с той или иной аксиомой отделимости. Каждая из доказываемых теорем устроена следующим образом: ее заключение отличается от посылки тем, что в нем вместо слова «точка» фигурирует сочетание «бикомпактное множество». Из совокупности полученных результатов извлекается простое, но важное следствие, касающееся непрерывных отображений бикомпактных пространств в хаусдорфовы пространства. В заключение мы доказываем теорему Уоллеса об отделимости, содержащую бóльшую часть теорем, полученных ранее.

Замкнутое подмножество $A$ бикомпактного пространства $X$ всегда бикомпактно, ибо каждая направленность в $A$ имеет поднаправленность, которая сходится к некоторой точке пространства $X$, непременно принадлежащей множеству $A$ ввиду его замкнутости. (Почти столь же просто этот факт выводится непосредственно из определения бикомпактности.) Обратное утверждение неверно, ибо если $A$ — собственное непустое подмножество антидискретного пространства $X$ (в нем только все $X$ и пустое множество открыты), то $A$ заведомо бикомпактно, хотя и не замкнуто в $X$. Такая ситуация исключена в случае хаусдорфовых пространств.

7. Теорема. *Если $A$ — бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства $X$ и $x \in X \setminus A$, то у точки $x$ и множества $A$ существуют непересекающиеся окрестности.*