принадлежит множеству $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}\}$. Так как $\mathfrak{S}$ — предбаза, то каждая точка x из произвольного элемента A семейства $\mathfrak{A}$ принадлежит пересечению некоторого конечного множества элементов семейства $\mathfrak{S}$, лежащему целиком в A. В предыдущем абзаце мы выяснили, что тогда некоторый элемент из этого семейства входит в $\mathfrak{A}$. Значит, $\bigcup\{A : A \in \mathfrak{A}\} = \bigcup\{A : A \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{A}\}$, и теорема доказана.

БИКОМПАКТНОСТЬ И АКСИОМЫ ОТДЕЛИМОСТИ

В этом параграфе мы изучим следствия бикомпактности, взятой вместе с той или иной аксиомой отделимости. Каждая из доказываемых теорем устроена следующим образом: ее заключение отличается от посылки тем, что в нем вместо слова «точка» фигурирует сочетание «бикомпактное множество». Из совокупности полученных результатов извлекается простое, но важное следствие, касающееся непрерывных отображений бикомпактных пространств в хаусдорфовы пространства. В заключение мы доказываем теорему Уоллеса об отделимости, содержащую бóльшую часть теорем, полученных ранее.

Замкнутое подмножество A бикомпактного пространства X всегда бикомпактно, ибо каждая направленность в A имеет поднаправленность, которая сходится к некоторой точке пространства X, непременно принадлежащей множеству A ввиду его замкнутости. (Почти столь же просто этот факт выводится непосредственно из определения бикомпактности.) Обратное утверждение неверно, ибо если A — собственное непустое подмножество антидискретного пространства X (в нем только все X и пустое множество открыты), то A заведомо бикомпактно, хотя и не замкнуто в X. Такая ситуация исключена в случае хаусдорфовых пространств.

7. Теорема. *Если A — бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства X и $x \in X \setminus A$, то у точки x и множества A существуют непересекающиеся окрестности.*

Следовательно, каждое бикомпактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто *).

Доказательство. Так как X — хаусдорфово пространство, то у каждой точки из множества A есть окрестность U, замыкание которой $\overline{U}$ не содержит точки x. В силу бикомпактности A существует конечное семейство U_0, U_1, ..., U_n открытых множеств, покрывающих в совокупности множество A и таких, что $x \notin \overline{U_i}$ при $i=0, 1, \ldots, n$. Положим $V = \bigcup\{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$; тогда $A \subset V$ и $x \notin \overline{V}$. Следовательно, $X \setminus \overline{V}$ и V — непересекающиеся окрестности точки x и множества A.

8. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение бикомпактного топологического пространства X на топологическое пространство Y. Тогда пространство Y бикомпактно; если оно удовлетворяет хаусдорфовой аксиоме отделимости, а отображение f взаимно однозначно, то f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное открытое покрытие пространства Y. Тогда семейство всех множеств вида $f^{-1}[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, образует открытое покрытие пространства X; в этом покрытии есть конечное подпокрытие. Семейство образов элементов последнего образует конечное подсемейство семейства $\mathfrak{A}$, покрывающее Y. Значит, пространство Y бикомпактно. Предположим теперь, что Y — хаусдорфово пространство и что отображение f взаимно однозначно. Произвольное замкнутое подмножество A пространства X бикомпактно; поэтому его образ $f[A]$ бикомпактен, а значит, и замкнут в пространстве Y. Таким образом, множество $(f^{-1})^{-1}[A]$ замкнуто, если замкнуто A, т. е. f^{-1} — непрерывное отображение.

9. Теорема. *У любых непересекающихся бикомпактных подмножеств A и B хаусдорфова пространства X существуют непересекающиеся окрестности.*

Следовательно, каждое бикомпактное хаусдорфово пространство нормально.

---

*) Эта теорема, как и многие другие результаты данной главы, впервые появилась в классическом труде П. С. Александрова и Урысона [2], посвященном созданной ими теории бикомпактных пространств. (*Прим. перев.*)

Доказательство. Какова бы ни была точка $x \in A$, у x и B в силу теоремы 5.7 существуют непересекающиеся окрестности. Иначе говоря, у каждой точки $x \in A$ есть окрестность U, замыкание которой не пересекается с множеством B, и, так как множество A бикомпактно, найдется конечное семейство $U_0, U_1, \ldots, U_n$ открытых множеств такое, что $\overline{U}_i$ не пересекается с B при $i=0, 1, \ldots, n$ и $A \subset V = \bigcup \{U_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Тогда V — окрестность множества A и $X \setminus \overline{V}$ — окрестность множества B, не пересекающаяся с V.

10. Теорема. *Если X — регулярное топологическое пространство, A — его бикомпактное подмножество и U — окрестность множества A, то существует замкнутая окрестность V множества A, содержащаяся в U.*

Следовательно, каждое бикомпактное регулярное пространство нормально.

Доказательство. В силу регулярности пространства X у каждой точки x множества A есть открытая окрестность W, замыкание которой содержится в U; из бикомпактности X следует, что найдется такое конечное открытое покрытие $W_0, W_1, \ldots, W_n$ множества A, что $\overline{W}_i \subset U$ при каждом i. Тогда $V = \bigcup \{\overline{W}_i : i=0, 1, \ldots, n\}$ — искомая окрестность множества A.

11. Теорема. *Пусть X — вполне регулярное пространство, A — его бикомпактное подмножество и U — окрестность множества A. Тогда на X существует непрерывная функция f со значениями в замкнутом интервале $[0,1]$, равная единице на A и нулю на $X \setminus U$.*

Доказательство. Для каждого x из A найдется функция g, равная единице в точке x и нулю на множестве $X \setminus U$. Множество $\left\{ y : g(y) > \frac{1}{2} \right\}$ открыто в X; полагая $h(y) = \min[2g(y), 1]$, мы получаем непрерывную функцию h со значениями в $[0,1]$, равную нулю на $X \setminus U$ и равную единице на некоторой окрестности точки x. Так как множество A бикомпактно, то найдется такое конечное семейство $h_0, h_1, \ldots, h_n$ функций, непрерывных на X, со значениями в $[0,1]$, что $A \subset \bigcup \{h_i^{-1}[1] : i=0, 1, \ldots, n\}$ и каждая h_i равна нулю на $X \setminus U$. Функция x, значение которой в точке x равно $\max\{h_i(x) : i=0, 1, \ldots, n\}$, будет искомой.

Две последние теоремы можно сформулировать несколько иначе. Предположение «A бикомпактно и U — окрестность множества A» можно заменить на такое: «если A бикомпактно и B — не пересекающееся с ним замкнутое множество»; форма заключения меняется при этом очевидным образом.

Большинство результатов этого параграфа легко вытекает из следующей теоремы.

12. Теорема (Уоллес). *Пусть X и Y — топологические пространства; A, B — бикомпактные подмножества пространств X и Y соответственно. Пусть, далее, W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в произведении $X \times Y$. Тогда существуют такие окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $U \times V \subset W$.*

Доказательство. Для каждого элемента (x, y) множества $A \times B$ найдутся открытая окрестность R точки x и открытая окрестность S точки y такие, что $R \times S \subset \subset W$. Так как множество B бикомпактно, то, зафиксировав $x \in A$, можно найти окрестности R_i точки x и соответствующие им открытые множества S_i, где $i = 0, 1, \ldots, n$, так, чтобы было $B \subset Q = \bigcup \{S_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Положим $P = \bigcap \{R_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$. Тогда P — окрестность точки x, а Q — окрестность множества B, причем они удовлетворяют условию $P \times Q \subset W$. Так как множество A бикомпактно, то существуют открытые множества P_i в X и Q_i в Y, где $i = 0, 1, \ldots, m$, такие, что каждое Q_i является окрестностью множества B, $P_i \times Q_i \subset W$ и $A \subset \bigcup \{P_i : i = = 0, 1, \ldots, m\} = U$. Тогда U и $V = \bigcap \{Q_i : i = 0, 1, \ldots, m\}$ — окрестности множества A и B соответственно и $U \times V$ — подмножество множества W. Теорема доказана.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Классическая теорема А. Н. Тихонова о произведении бикомпактных пространств, несомненно, является самой полезной теоремой о бикомпактности. Весьма правдоподобно, что это вообще самая важная теорема общей топологии. Настоящий параграф посвящен теореме Тихонова и некоторым следствиям из нее.