Две последние теоремы можно сформулировать несколько иначе. Предположение «A бикомпактно и U — окрестность множества A» можно заменить на такое: «если A бикомпактно и B — не пересекающееся с ним замкнутое множество»; форма заключения меняется при этом очевидным образом.

Большинство результатов этого параграфа легко вытекает из следующей теоремы.

12. Теорема (Уоллес). *Пусть X и Y — топологические пространства; A, B — бикомпактные подмножества пространств X и Y соответственно. Пусть, далее, W — произвольная окрестность множества $A \times B$ в произведении $X \times Y$. Тогда существуют такие окрестности U и V множеств A и B соответственно, что $U \times V \subset W$.*

Доказательство. Для каждого элемента (x, y) множества $A \times B$ найдутся открытая окрестность R точки x и открытая окрестность S точки y такие, что $R \times S \subset W$. Так как множество B бикомпактно, то, зафиксировав $x \in A$, можно найти окрестности R_i точки x и соответствующие им открытые множества S_i, где $i=0, 1, \ldots, n$, так, чтобы было $B \subset Q = \bigcup \{S_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Положим $P = \bigcap \{R_i : i=0, 1, \ldots, n\}$. Тогда P — окрестность точки x, а Q — окрестность множества B, причем они удовлетворяют условию $P \times Q \subset W$. Так как множество A бикомпактно, то существуют открытые множества P_i в X и Q_i в Y, где $i=0, 1, \ldots, m$, такие, что каждое Q_i является окрестностью множества B, $P_i \times Q_i \subset W$ и $A \subset \bigcup \{P_i : i=0, 1, \ldots, m\} = U$. Тогда U и $V = \bigcap \{Q_i : i=0, 1, \ldots, m\}$ — окрестности множества A и B соответственно и $U \times V$ — подмножество множества W. Теорема доказана.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ БИКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Классическая теорема А. Н. Тихонова о произведении бикомпактных пространств, несомненно, является самой полезной теоремой о бикомпактности. Весьма правдоподобно, что это вообще самая важная теорема общей топологии. Настоящий параграф посвящен теореме Тихонова и некоторым следствиям из нее.

13. Теорема (Тихонов). *Декартово произведение произвольного семейства бикомпактных топологических пространств бикомпактно относительно топологии произведения.*

Доказательство. Пусть $Q=\Pi\{X_a : a \in A\}$, где каждое X_a — бикомпактное топологическое пространство, причем множество Q наделено топологией произведения. Обозначим через $\mathfrak{S}$ предбазу топологии произведения, образованную всеми множествами вида $P_a^{-1}[U]$, где P_a — проектирование в a-е координатное пространство и U — произвольное множество, открытое в X_a. Чтобы доказать, что пространство Q бикомпактно, достаточно в силу теоремы 4.6 установить, что каждое подсемейство $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$, никакое конечное подсемейство которого не покрывает Q, само не покрывает пространства Q. При каждом $a \in A$ обозначим через $\mathfrak{B}_a$ семейство всех открытых подмножеств U пространства X_a, для которых $P_a^{-1}[U] \in \mathfrak{A}$. Никакое конечное подсемейство семейства $\mathfrak{B}_a$ не покрывает пространства X_a. Поэтому в силу бикомпактности X_a найдется такая точка x_a, что $x_a \in X_a \setminus U$ для любого элемента U семейства $\mathfrak{B}_a$. Точка x, a-я координата которой равна x_a *), не принадлежит тогда ни одному элементу семейства $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{A}$ не покрывает пространства Q.

Мы дадим теперь доказательство теоремы Тихонова, не связанное с теоремой 5.6 Александера.

Другое доказательство (Бурбаки). Будет доказано, что если $\mathfrak{B}$ — центрированное семейство подмножеств произведения, то $\bigcap\{\bar{B} : B \in \mathfrak{B}\}$ не пусто. Класс всех центрированных семейств имеет конечный характер. В силу леммы Тьюки 0.25, (в) можно, следовательно, предположить, что $\mathfrak{B}$ — максимальное относительно центрированности семейство. Из максимальности $\mathfrak{B}$ следует, что каждое множество, содержащее какой-нибудь элемент семейства $\mathfrak{B}$, само принадлежит $\mathfrak{B}$ и что пересечение любых двух элементов $\mathfrak{B}$ входит в $\mathfrak{B}$. Далее, если множество C пересекается с каждым элементом семейства $\mathfrak{B}$, то $C \in \mathfrak{B}$ в силу максимальности **) $\mathfrak{B}$. Нако-

*) Для каждого $a \in A$. (*Прим. перев.*)

**) Мы сейчас, очевидно, передоказываем часть предложения 2. И.

нец, семейство проекций элементов $\mathfrak{B}$ в координатное пространство X_a центрировано. Следовательно, существует точка $x_a \in \bigcap\{\overline{P_a[B]} : B \in \mathfrak{B}\}$. Точка x, a-я координата которой есть x_a, обладает тогда следующим свойством: каждая окрестность U точки x_a пересекает множество $P_a[B]$ для каждого B из $\mathfrak{B}$. Этому эквивалентно условие: $P_a^{-1}[U] \in \mathfrak{B}$, какова бы ни была окрестность U точки x_a в пространстве X_a. Значит, и конечное пересечение множеств этого вида тоже принадлежит $\mathfrak{B}$. Но тогда каждая окрестность точки x, взятая из определяющей базы топологии произведения, принадлежит $\mathfrak{B}$ и, значит, пересекается с каждым элементом семейства $\mathfrak{B}$. Следовательно, $x \in \overline{B}$ для каждого $B \in \mathfrak{B}$, что доказывает теорему.

С важными применениями теоремы Тихонова мы встретимся в главе о пространствах отображений. Сейчас мы рассмотрим одно очень простое ее следствие. Подмножество псевдометрического пространства называется ограниченным тогда и только тогда, когда диаметр его конечен. Таким образом, подмножество пространства вещественных чисел ограничено в том и только в том случае, когда у него есть верхняя и нижняя грань. Следующее утверждение — классическая теорема Гейне — Бореля — Лебега.

14. Теорема. *Подмножество n-мерного евклидова пространства бикомпактно в том и только в том случае, когда оно замкнуто и ограничено.*

Доказательство. Пусть A — бикомпактное подмножество пространства E_n. Тогда A замкнуто, ибо E_n — хаусдорфово пространство. Из бикомпактности множества A следует, что его можно покрыть конечной совокупностью открытых шаров радиуса 1. Так как каждый шар является ограниченным множеством, то все множество A ограничено. Пусть A — замкнутое и ограниченное подмножество пространства E_n. Обозначим через B_i образ множества A при проектировании на i-е координатное пространство. Заметим, что каждое B_i ограничено, ибо при проектировании расстояния не увеличиваются. Тогда $A \subset \Pi\{B_i : i=0, 1, \ldots, n-1\}$, причем справа стоит подмножество произведения замкнутых ограниченных интервалов вещественных чисел. Так как множество замкнуто в этом произведении, а произведение бикомпактных пространств бикомпактно, то доказательство теоремы сводится к тому, чтобы установить, что замкнутый интервал $[a, b]$ бикомпактен в обычной топологии.

Пусть $\mathfrak{C}$ — произвольное открытое покрытие отрезка $[a, b]$ и c — верхняя грань множества таких $x \in [a, b]$, что в $\mathfrak{C}$ есть конечное покрытие множества $[a, x]$. Названное множество не пусто, так как ему принадлежит точка a. Возьмем какой-нибудь элемент U семейства $\mathfrak{C}$, содержащий точку c, и выберем точку d в открытом интервале (a, c) так, чтобы было $[d, c] \subset U$. В $\mathfrak{C}$ есть конечное покрытие множества $[a, d]$. Если присоединить к этому семейству множество U, то получим конечное покрытие отрезка $[a, c]$. Если только c не совпадает с b, то последнее семейство покрывает и некоторый интервал, идущий вправо от c, что противоречит выбору элемента c. Теорема доказана.

Замкнутый единичный интервал бикомпактен. Следовательно, каждый куб (произведение замкнутых единичных интервалов) бикомпактен. Это замечание делает почти очевидной следующую характеристику тихоновских пространств (т. е. вполне регулярных T_1-пространств).

15. Теорема. *Топологическое пространство является тихоновским в том и только в том случае, когда оно гомеоморфно подпространству бикомпактного хаусдорфова пространства.*

Доказательство. В силу 4.6 каждое тихоновское пространство гомеоморфно подпространству куба, а каждый куб есть бикомпактное хаусдорфово пространство. Обратно, каждое бикомпактное хаусдорфово пространство нормально и, следовательно (лемма Урысона 4.4), является тихоновским пространством. А каждое подпространство тихоновского пространства само есть тихоновское пространство.

Произведение бесконечного множества небикомпактных пространств не бикомпактно в очень сильном смысле. Подмножество топологического пространства называют *нигде не плотным* в этом пространстве тогда и только тогда, когда внутренность его пуста *).

16. Теорема. *Если множество небикомпактных координатных пространств бесконечно, то каждое бикомпактное подмножество произведения нигде не плотно в нем.*

Доказательство. Пусть в $\Pi\{X_a : a \in A\}$ есть бикомпактное множество B с внутренней точкой x. Тогда B содержит некоторую окрестность U точки x, принадлежащую определяющей базе и, следовательно, имеющую вид $\bigcap\{P_a^{-1}[V_a] : a \in F\}$, где F — конечное подмножество множества A и каждое V_a открыто в X_a. Если индекс b принадлежит множеству $A \setminus F$, то $P_b[B] = X_b$ и пространство X_b бикомпактно, как непрерывный образ бикомпактного пространства. Следовательно, все координатные пространства, за исключением конечного числа, бикомпактны.

ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА **)

Топологическое пространство X называется локально бикомпактным тогда и только тогда, когда у каждой его точки есть хотя бы одна открытая окрестность, замыкание которой представляет собой бикомпактное подпространство пространства X. Бикомпактное пространство автоматически локально бикомпактно; каждое дискретное пространство локально бикомпактно, и каждое замкнутое подпространство локально бикомпактного пространства само локально бикомпактно (пересечение замкнутого множества и бикомпактного множества замкнуто в последнем и потому бикомпактно). Локально бикомпактные пространства обладают многими хорошими свойствами бикомпактных пространств. Следующее пред-

*) Обычно называют нигде не плотными множества, замыкание которых удовлетворяет сформулированному условию. Именно так и мы будем поступать в дальнейшем. (*Прим. перев.*)

**) Понятие локально бикомпактного (как и локально компактного) пространства введено и исследовано П. С. Александровым в работе [2]; подробное изложение результатов этой работы включено в работу П. С. Александрова и Урысона [2]. (*Прим. перев.*)