вают *нигде не плотным* в этом пространстве тогда и только тогда, когда внутренность его пуста *).

16. Теорема. *Если множество небикомпактных координатных пространств бесконечно, то каждое бикомпактное подмножество произведения нигде не плотно в нем.*

Доказательство. Пусть в $\Pi\{X_a : a \in A\}$ есть бикомпактное множество B с внутренней точкой x. Тогда B содержит некоторую окрестность U точки x, принадлежащую определяющей базе и, следовательно, имеющую вид $\cap\{P_a^{-1}[V_a] : a \in F\}$, где F — конечное подмножество множества A и каждое V_a открыто в X_a. Если индекс b принадлежит множеству $A \setminus F$, то $P_b[B] = X_b$ и пространство X_b бикомпактно, как непрерывный образ бикомпактного пространства. Следовательно, все координатные пространства, за исключением конечного числа, бикомпактны.

ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА **)

Топологическое пространство X называется локально бикомпактным тогда и только тогда, когда у каждой его точки есть хотя бы одна открытая окрестность, замыкание которой представляет собой бикомпактное подпространство пространства X. Бикомпактное пространство автоматически локально бикомпактно; каждое дискретное пространство локально бикомпактно, и каждое замкнутое подпространство локально бикомпактного пространства само локально бикомпактно (пересечение замкнутого множества и бикомпактного множества замкнуто в последнем и потому бикомпактно). Локально бикомпактные пространства обладают многими хорошими свойствами бикомпактных пространств. Следующее пред-

---

*) Обычно называют нигде не плотными множества, замыкание которых удовлетворяет сформулированному условию. Именно так и мы будем поступать в дальнейшем. (*Прим. перев.*)

**) Понятие локально бикомпактного (как и локально компактного) пространства введено и исследовано П. С. Александровым в работе [2]; подробное изложение результатов этой работы включено в работу П. С. Александрова и Урысона [2]. (*Прим. перев.*)

ложение — удобный инструмент для изучения таких пространств.

17. Теорема. *Если локально бикомпактное пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа или регулярно, то семейство замкнутых бикомпактных окрестностей его произвольной точки образует базу системы всех ее окрестностей.*

Доказательство. Пусть x — любая точка пространства X, C — ее бикомпактная окрестность и U — произвольная окрестность точки x. Если пространство X регулярно, то у x есть замкнутая окрестность V, содержащаяся в пересечении множества U с внутренностью множества C; очевидно V — замкнутое и бикомпактное множество. Пусть X — хаусдорфово пространство и W — внутренность множества $U \cap C$. Применяя теорему 5.9 к бикомпактному хаусдорфову пространству $\overline{W}$, мы заключаем, что в W содержится замкнутое бикомпактное множество, являющееся окрестностью точки x в $\overline{W}$. Тогда множество V будет окрестностью точки x в пространстве W (мы имеем в виду топологию, индуцированную в W из $\overline{W}$, т. е. из X), а значит, и в пространстве X.

В частности, мы получаем, что каждое хаусдорфово локально бикомпактное пространство регулярно. В действительности имеет место более сильный результат.

18. Теорема. *Пусть U — окрестность замкнутого бикомпактного подмножества A регулярного локально бикомпактного топологического пространства X. Тогда существует замкнутая бикомпактная окрестность V множества A такая, что $A \subset V \subset U$.*

Более того, на X существует непрерывная функция f со значениями в замкнутом единичном интервале, равная нулю на A и единице на $X \setminus V$.

Доказательство. У каждой точки $x \in A$ есть окрестность W, являющаяся замкнутым бикомпактным подмножеством множества U. Так как множество A бикомпактно, то внутренности некоторого конечного семейства таких окрестностей покрывают A. Объединение элементов этого семейства является искомой бикомпактной окрестностью множества A. Множество V в индуцированной топологии представляет собой регулярное бикомпактное и, следовательно, нормальное пространство (теорема 5.10). Значит, на V существует непрерывная функция g со значениями в замкнутом единичном интервале, равная нулю на A и единице на $V \setminus V^0$, где V^0 — внутренность множества V. Пусть f — функция на X, равная g на V и 1 на $X \setminus V$. Функция f непрерывна, ибо множества V^0 и $X \setminus V$ отделены, а на них она непрерывна (задача 3.Б).

Следовательно, каждое локально бикомпактное регулярное топологическое пространство вполне регулярно, и каждое локально бикомпактное хаусдорфово пространство является тихоновским пространством.

Вообще говоря, непрерывный образ локально бикомпактного пространства не обязательно является локально бикомпактным пространством — ведь каждое дискретное пространство локально бикомпактно, и любое топологическое пространство является непрерывным образом дискретного пространства (достаточно взять то же множество, дискретную топологию и тождественное отображение). Если отображение одновременно открыто и непрерывно, то образ бикомпактной окрестности точки является бикомпактной окрестностью образа этой точки. Значит, образ локально бикомпактного пространства при непрерывном открытом отображении является локально бикомпактным пространством. Этот простой факт и один из предшествующих результатов позволяют точно описать те пространства произведений, которые локально бикомпактны.

19. Теорема. *Если произведение локально бикомпактно, то и каждое координатное пространство локально бикомпактно, причем все они, за исключением, быть может, конечного числа, бикомпактны.*

Доказательство. Если произведение локально бикомпактно, то и все координатные пространства локально бикомпактны, так как проектирование на любое из них открыто. Если среди координатных пространств бесконечно много небикомпактных, то в соответствии с 5.16 каждое бикомпактное подмножество произведения нигде не плотно в нем; в этом случае ни у одной точки произведения нет бикомпактной окрестности.