ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

В этой главе продолжается исследование фактор-пространств, начатое в главе 3. Мы интересуемся здесь результатами, характерными для бикомпактных пространств. Они собраны в единственной теореме параграфа. Уже отмечалось, что непрерывный образ бикомпактного пространства бикомпактен. Однако без дополнительных ограничений образ может все же оказаться малопривлекательным пространством. Например, пусть X — замкнутый единичный интервал с обычной топологией и $\mathfrak{D}$ — его разбиение на множества вида $\{x : x - a$ — *рациональное число*$\}$; соответствующее фактор-пространство бикомпактно и проектирование на него открыто, но фактор-топология антидискретна (только все пространство и пустое множество открыты). Оказывается, однако, что при непрерывном разбиении топологического пространства X на бикомпактные элементы фактор-пространству передаются многие свойства пространства X.

20. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathfrak{D}$ — непрерывное разбиение пространства X на бикомпактные множества, наделенное фактор-топологией. Тогда пространство $\mathfrak{D}$ хаусдорфово, регулярно, локально бикомпактно, имеет счетную базу, коль скоро пространство X обладает соответствующим свойством.*

Доказательство. Согласимся для удобства называть подмножество пространства X отмеченным тогда и только тогда, когда оно является объединением элементов семейства $\mathfrak{D}$. Из определения непрерывности разбиения $\mathfrak{D}$ следует, что любая окрестность произвольного элемента A семейства $\mathfrak{D}$ в X содержит некоторую отмеченную окрестность множества A. Значит, образ любой окрестности множества A в X при проектировании является окрестностью точки A в $\mathfrak{D}$. Далее, проектирование переводит замкнутые множества в замкнутые (3.12). Пусть теперь X — хаусдорфово пространство и A, B — различные элементы разбиения $\mathfrak{D}$. В силу теоремы 5.9 у множеств A и B существуют непересекающиеся окрестности в пространстве X; в них содержатся отмеченные непересекающиеся окрестности, а проекции последних являются искомыми непересекающимися окрестностями точек A и B в пространстве $\mathfrak{D}$. Если X — регулярное пространство, $A \in \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{U}$ — окрестность точки A в $\mathfrak{D}$, то объединение U элементов, входящих в $\mathfrak{U}$, является окрестностью множества A в X. В силу теоремы 5.10 в U содержится некоторая замкнутая окрестность множества A в пространстве X. Образ последней при проектировании является искомой окрестностью точки A в пространстве $\mathfrak{D}$. Если X — локально бикомпактное пространство, то ясно, что у каждого элемента разбиения $\mathfrak{D}$ есть бикомпактная окрестность в X; образ ее при проектировании на $\mathfrak{D}$ является бикомпактной окрестностью точки A в пространстве $\mathfrak{D}$.

Наконец, пусть пространство X обладает счетной базой $\mathfrak{B}$. Семейство $\mathfrak{U}$ всевозможных конечных объединений элементов этой базы счетно. Для каждого $U \in \mathfrak{U}$ обозначим через U' объединение всех элементов разбиения $\mathfrak{D}$, являющихся подмножествами множества U, и через $\mathfrak{J}$ — семейство всех множеств U', где U пробегает $\mathfrak{U}$. Образы элементов семейства $\mathfrak{J}$ при проектировании открыты; мы сейчас покажем, что они образуют базу фактор-топологии. Достаточно установить, что для каждого $A \in \mathfrak{D}$ и каждой окрестности V множества A в X существует такое $U \in \mathfrak{J}$, что $A \subset U \subset V$. Но множество A можно покрыть конечной совокупностью элементов базы $\mathfrak{B}$ так, чтобы их объединение W, являющееся элементом семейства $\mathfrak{U}$, содержалось в V. Положим $U = W'$; тогда $U \in \mathfrak{J}$ и $A \subset U \subset V$, откуда и следует теорема.

У этой теоремы есть интересное следствие. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство; рассмотрим произвольное его непрерывное разбиение на бикомпактные множества. Тогда фактор-пространство хаусдорфово, нормально, удовлетворяет второй аксиоме счетности и, следовательно, метризуемо.

БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

Изучая небикомпактное топологическое пространство X, часто бывает удобно перейти к бикомпактному пространству, содержащему X в качестве подпространства. Например, иногда полезно присоединить к пространству вещественных чисел еще две точки, $+\infty$ и $-\infty$.