окрестностями точек A и B в пространстве $\mathfrak{D}$. Если X — регулярное пространство, $A \in \mathfrak{D}$ и $\mathfrak{U}$ — окрестность точки A в $\mathfrak{D}$, то объединение U элементов, входящих в $\mathfrak{U}$, является окрестностью множества A в X. В силу теоремы 5.10 в U содержится некоторая замкнутая окрестность множества A в пространстве X. Образ последней при проектировании является искомой окрестностью точки A в пространстве $\mathfrak{D}$. Если X — локально бикомпактное пространство, то ясно, что у каждого элемента разбиения $\mathfrak{D}$ есть бикомпактная окрестность в X; образ ее при проектировании на $\mathfrak{D}$ является бикомпактной окрестностью точки A в пространстве $\mathfrak{D}$.

Наконец, пусть пространство X обладает счетной базой $\mathfrak{B}$. Семейство $\mathfrak{U}$ всевозможных конечных объединений элементов этой базы счетно. Для каждого $U \in \mathfrak{U}$ обозначим через U' объединение всех элементов разбиения $\mathfrak{D}$, являющихся подмножествами множества U, и через $\mathfrak{J}$ — семейство всех множеств U', где U пробегает $\mathfrak{U}$. Образы элементов семейства $\mathfrak{J}$ при проектировании открыты; мы сейчас покажем, что они образуют базу фактор-топологии. Достаточно установить, что для каждого $A \in \mathfrak{D}$ и каждой окрестности V множества A в X существует такое $U \in \mathfrak{J}$, что $A \subset U \subset V$. Но множество A можно покрыть конечной совокупностью элементов базы $\mathfrak{B}$ так, чтобы их объединение W, являющееся элементом семейства $\mathfrak{U}$, содержалось в V. Положим $U = W'$; тогда $U \in \mathfrak{J}$ и $A \subset U \subset V$, откуда и следует теорема.

У этой теоремы есть интересное следствие. Пусть X — сепарабельное метрическое пространство; рассмотрим произвольное его непрерывное разбиение на бикомпактные множества. Тогда фактор-пространство хаусдорфово, нормально, удовлетворяет второй аксиоме счетности и, следовательно, метризуемо.

БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

Изучая небикомпактное топологическое пространство X, часто бывает удобно перейти к бикомпактному пространству, содержащему X в качестве подпространства. Например, иногда полезно присоединить к пространству вещественных чисел еще две точки, $+\infty$ и $-\infty$.

Получающееся пространство часто называют *расширенным пространством* вещественных чисел. Оно становится линейно упорядоченным, если дополнительно согласиться считать $+\infty$ его наибольшим, а $-\infty$ — его наименьшим элементом. При таком продолжении обычного упорядочения оказывается, что у каждого непустого подмножества расширенного пространства вещественных чисел есть как нижняя, так и верхняя грань и что в топологии, порожденной порядком, это пространство бикомпактно (5.В). Расширенное пространство вещественных чисел является бикомпактным расширением пространства вещественных чисел — в каком точно смысле, сейчас будет сказано. Конечно, все это нужно лишь для удобства и ничего не прибавляет к нашим знаниям о вещественных числах. Однако мы в результате получаем возможность применить стандартные рассуждения, связанные с бикомпактностью; многие доказательства при этом упрощаются.

Простейшая конструкция расширения топологического пространства до бикомпактного основана на добавлении одной точки. Эта процедура знакома по анализу: в теории функций комплексная сфера *) строится посредством добавления одной точки, обозначаемой символом ∞, к евклидовой плоскости. Окрестностями точки ∞ объявляются дополнения до ограниченных подмножеств плоскости. Можно провести подобное построение для любого топологического пространства; ключ к определению правильной топологии в расширении дает следующее замечание: дополнение до произвольной открытой окрестности точки ∞ в комплексной сфере бикомпактно. *Одноточечным бикомпактным расширением* **) топологического пространства X называется множество $X^* = X \cup \{\infty\}$ с топологией, в которую входят открытые подмножества пространства X и все такие подмножества U множества X^*, что $X^* \setminus U$ — замкнутое

*) У нас принято название «сфера Римана». Под комплексной сферой более естественно понимать сферу в комплексном пространстве. (*Прим перев.*)

**) Это определение в действительности не полно, пока не определен элемент ∞. Годится любой элемент, не принадлежащий X, например само X.

бикомпактное подмножество пространства X. Конечно, следует проверить, что тем самым определена некоторая топология на X^*. Мы делаем это, доказывая следующее утверждение.

21. Теорема (Александров). *Одноточечное бикомпактное расширение X^* топологического пространства X бикомпактно, причем пространство X является его подпространством. Пространство X^* удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа в том и только в том случае, когда X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство.*

Доказательство. Множество U открыто в X^* тогда и только тогда, когда (а) $U \cap X$ открыто в X и (б) если $\infty \in U$, то $X \setminus U$ бикомпактно. Следовательно, конечные пересечения и произвольные объединения открытых в X^* множеств пересекают X по открытым множествам. Если точка ∞ принадлежит пересечению двух каких-нибудь открытых подмножеств пространства X^*, то дополнением к этому пересечению служит объединение двух замкнутых бикомпактных подмножеств пространства X, т. е. замкнутое и бикомпактное множество. Если точка ∞ входит в объединение некоторого семейства открытых в X^* множеств, то она принадлежит некоторому элементу U этого семейства. Тогда дополнение к рассматриваемому объединению является замкнутым подмножеством бикомпактного множества $X \setminus U$ и потому само замкнуто и бикомпактно. Следовательно, X^* — топологическое пространство и X — его подпространство. Пусть $\mathfrak{U}$ — любое открытое покрытие пространства X^*. Точка ∞ принадлежит некоторому его элементу U. Множество $X \setminus U$ бикомпактно, поэтому в $\mathfrak{U}$ существует конечное покрытие этого множества. Значит, пространство X^* бикомпактно. Если X^* — хаусдорфово пространство, то X, как его открытое подпространство, локально бикомпактно и хаусдорфово. Наконец, надо доказать, что если X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, то X^* — хаусдорфово пространство. Нужно лишь установить, что у любой точки $x \in X$ и у точки ∞ имеются непересекающиеся окрестности. Но так как X — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, то у точки x в X есть замкнутая бикомпактная окрестность U. Тогда $X^* \setminus U$ — нужная окрестность точки ∞.

Если X — бикомпактное топологическое пространство, то ∞ — изолированная точка в одноточечном бикомпактном расширении (т. е. множество $\{\infty\}$ одновременно открыто и замкнуто). Обратно, если ∞ — изолированная точка пространства X^*, то X замкнуто в X^* и, значит, бикомпактно.

Расширение до бикомпакта посредством добавления одной точки очень специально; мы хотим рассмотреть другие способы вложения топологических пространств в бикомпактные топологические пространства. Оказывается, удобнее говорить о вложениях, чем о подпространствах. Поэтому *бикомпактное расширение* топологического пространства X определяется как пара (f, Y), где Y — бикомпактное топологическое пространство, а f — гомеоморфизм пространства X на всюду плотное подпространство пространства Y. (Для согласования с ранее сказанным укажем, что одноточечное бикомпактное расширение пространства X можно понимать как пару (i, X^*), где i — тождественное отображение *).) Бикомпактное расширение (f, Y) называется хаусдорфовым в том и только в том случае, когда Y — хаусдорфово пространство. На семействе всех бикомпактных расширений пространства X можно определить отношение порядка по такому правилу: $(f, Y) \geqslant (g, Z)$ тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение h: $Y \to Z$ такое, что $h \circ f = g$. Равносильное утверждение: $(f, Y) \geqslant (g, Z)$ тогда и только тогда, когда отображение $g \circ f^{-1}$ пространства $f[X]$ в Z можно продолжить до непрерывного отображения всего Y в Z. Если в качестве h можно взять гомеоморфизм, то расширения (f, Y) и (g, Z) называются *топологически эквивалентными*. В этом случае выполняются оба соотношения — и $(f, Y) \geqslant (g, Z)$, и $(g, Z) \geqslant (f, Y)$, ибо h^{-1} — непрерывное отображение Z на Y такое, что $f = h^{-1} \circ g$.

22. Теорема. *Семейство всех бикомпактных расширений произвольного топологического пространства*

*) Общее понятие (хаусдорфова) бикомпактного расширения впервые появляется у Тихонова [1].

частично упорядочено отношением $\geqslant$. *Если* (f, Y) *и* (g, Z) — *хаусдорфовы бикомпактные расширения некоторого пространства и* $(f, Y) \geqslant (g, Z) \geqslant (f, Y)$, *то расширения* (f, Y) *и* (g, Z) *топологически эквивалентны.*

Доказательство. Если $(f, Y) \geqslant (g, Z) \geqslant (h, U)$ для некоторых бикомпактных расширений пространства X, то имеются непрерывное отображение j пространства Y в Z и непрерывное отображение k пространства Z в U такие, что $g = j \circ f$ и $h = k \circ g$. Тогда $h = k \circ j \circ f$ и $(f, Y) \geqslant (h, U)$. Значит, $\geqslant$ — частичное упорядочение семейства всех бикомпактных расширений пространства X. Если (f, Y) и (g, Z) — хаусдорфовы бикомпактные расширения, каждое из которых следует за другим относительно упорядочения $\geqslant$, то у отображения $f \circ g^{-1}$ и у отображения $g \circ f^{-1}$ есть непрерывные продолжения j и k соответственно на все Z и на все Y. Так как $k \circ j$ — тождественное отображение на всюду плотном подмножестве $g[X]$ пространства Z и Z — хаусдорфово пространство, то $k \circ j$ — тождественное отображение пространства Z на себя. Точно так же $j \circ k$ — тождественное отображение пространства Y на себя. Следовательно, (f, Y) и (g, Z) — топологически эквивалентные расширения.

Наименьшим бикомпактным расширением бикомпактного хаусдорфова пространства X является само X (точнее, пара (i, X), где i — тождественное отображение пространства X на себя). Можно было бы ожидать, что одноточечное бикомпактное расширение небикомпактного пространства будет наименьшим относительно упорядочения $\geqslant$ среди всех его бикомпактных расширений. Если ограничиться хаусдорфовыми бикомпактными расширениями, то это действительно так (следствие из 5.Ж), но легко показать, что в общем случае не существует бикомпактного расширения, меньшего всех остальных. С другой стороны, если у пространства X есть хаусдорфово бикомпактное расширение (таковы в силу 5.15 тихоновские пространства), то у X есть и максимальное хаусдорфово бикомпактное расширение. Сейчас мы построим последнее.

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Обозначим через $F(X)$ семейство всех непрерывных на X функций со значениями в замкнутом единичном интервале Q. Куб $Q^{F(X)}$ (произведение $F(X)$ экземпляров единичного интервала Q) бикомпактен в силу теоремы Тихонова. Отображение вычисления e переводит элемент x пространства X в элемент $e(x)$ куба $Q^{F(x)}$, f-я координата которого для каждого f из $F(X)$ есть $f(x)$. Вычисление является непрерывным отображением пространства X в куб $Q^{F(X)}$, а если X — тихоновское пространство, то e — гомеоморфизм X на подпространство куба $Q^{F(X)}$. (В точности это утверждается в лемме о вложении 4.5.) *Расширением Стоуна—Чеха* пространства X называется пара $(e, \beta(X))$, где $\beta(X)$ — замыкание множества $e[X]$ в кубе $Q^{F(X)}$. Прежде чем сформулировать основное свойство этого бикомпактного расширения, докажем одну лемму.

23. Лемма. *Пусть f — отображение множества A в множество B и f^* — отображение куба Q^B в куб Q^A, определенное формулой $f^*(y) = y \circ f$ для всех y из Q^B. Отображение f^* непрерывно.*

Доказательство. Отображение в пространство произведения тогда и только тогда непрерывно, когда непрерывна его суперпозиция с каждым проектированием на координатное пространство (3.3). Если a — элемент множества A, то $P_a \cdot f^*(y) = P_a(y \circ f) = y(f(a))$. Но $y(f(a))$ — это просто проекция точки y в $f(a)$-е координатное пространство произведения Q^B, а отображение проектирования непрерывно.

Описанная в этой лемме конструкция заслуживает внимания; она систематически встречается в рассуждениях о пространствах отображений. Отметим, что отображение f^*, индуцированное f, действует в направлении, противоположном f в том смысле, что f переводит A в B, а f^* переводит Q^B в Q^A.

После этой леммы доказательство главной теоремы о бикомпактном расширении Стоуна — Чеха сводится к стандартному, хотя и не совсем простому, вычислению.

24. Теорема (М. Стоун и Чех). *Пусть X — тихоновское пространство и f — его непрерывное отображение на бикомпактное хаусдорфово пространство Y. Тогда существует продолжение отображения f до непрерывного отображения всего бикомпактного расширения $\beta(X)$ в Y. (Точнее, пусть $(e, \beta(X))$ — расширение Стоуна — Чеха,* *тогда $f\circ e^{-1}$ можно продолжить до непрерывного отображения пространства $\beta(X)$ в пространство Y.)*

Доказательство. По заданному отображению f определим отображение $f^*\colon F(Y)\to F(X)$, положив $f^*(a)=a\circ f$ для каждого a из $F(Y)$. Продолжая так же, определим $f^{**}\colon Q^{F(X)}\to Q^{F(Y)}$ правилом $f^{**}(q)=q\circ f^*$ для каждого q из $Q^{F(X)}$. Обозначим через e отображение вычисления X в $Q^{F(X)}$ и через g — отображение вычисления Y в $Q^{F(Y)}$. Следующая диаграмма отражает возникшую ситуацию.

$$\begin{array}{ccc} \beta(X)\subset Q^{F(X)} & \xrightarrow{\quad f^{**}\quad} & Q^{F(Y)}\supset\beta(Y) \\ \uparrow e & & \uparrow g \\ X & \xrightarrow{\qquad f\qquad} & Y \end{array}$$

Отображение e является гомеоморфизмом. Отображение g — гомеоморфизм пространства Y на $\beta(Y)$, ибо Y — бикомпактное хаусдорфово пространство. Отображение f^{**} непрерывно в силу леммы 5.23, и если доказать, что $f^{**}\circ e=g\circ f$, то будет ясно, что $g^{-1}\circ f^{**}$ — искомое непрерывное продолжение отображения $f\circ e^{-1}$. Пусть x — произвольный элемент из X и h — любой элемент из $F(Y)$. Тогда $(f^{**}\circ e)(x)(h)=(e(x)\circ f^*)(h)=e(x)(h\circ f)=h\circ f(x)=g(f(x))(h)=(g\circ f)(x)(h)$ в силу определений отображений f^{**}, f^*, e и g соответственно. Отсюда следует заключение теоремы.

Из возможности продолжения отображений, установленной в предыдущей теореме, следует, что бикомпактное расширение Стоуна — Чеха $(e,\ \beta(X))$ следует за любым другим бикомпактным хаусдорфовым расширением пространства X относительно упорядочения $\geqslant$ и является, таким образом, наибольшим бикомпактным хаусдорфовым расширением. Если $(f,\ Y)$ — какое-нибудь бикомпактное расширение, до которого продолжаются все непрерывные отображения пространства X в бикомпакты *), то $(f, Y)\geqslant(e,\ \beta(X))$ и в силу теоремы 5.22 расширение (f, Y) топологически эквивалентно расширению

*) Бикомпактами в русской терминологии называются бикомпактные хаусдорфовы пространства. (*Прим. перев.*)

$(e, \beta(X))$. Следовательно, возможность продолжения отображений, установленная в теореме 5.24, характеризует бикомпактное расширение $(e, \beta(X))$ с точностью до топологической эквивалентности.

25. Замечание. Приведенные выше результаты (М. Стоун [2] и Чех [1]) дают нам максимальное бикомпактное расширение. Много меньших бикомпактных расширений было построено для различных целей. Литература, посвященная этим вопросам, чрезвычайно велика, и мы в состоянии указать только на немногие из наиболее важных вкладов. По поводу недавнего дополнения к одной из самых старых теорий бикомпактного расширения (теория простых концов Каратеодори) см. работу Урсела и Янга [1]. Фрёйденталь в работе [1] исследовал бикомпактное расширение, являющееся максимальным в классе, гораздо более узком, чем тот, в котором главенствует $\beta(X)$ *). Общее обсуждение бикомпактных расширений дается в работах Мышкиса [1], [2] и [3]. Он делит описания бикомпактных расширений на «внешние» (таковы описания $\beta(X)$ и почти периодического бикомпактного расширения группы — последнее намечено в 7.Ф) и «внутренние» (например, так определяются бикомпактные расширения П. С. Александрова **) и Уолмена (5.Т)). Во взаимоотношении между внутренним и внешним описаниями бикомпактного расширения часто и кроется главный интерес рассмотрения последнего. Кое-что ***) о внутренней структуре расширения $\beta(X)$ говорится в работах Ю. Нагата [2], Ю. М. Смирнова [4] и Уоллеса [2]. Бикомпактное расширени $\beta(X)$ также связано с понятием абсолютного замыкания; см., например, работы М. Стоуна [2], А. Д. Александрова [1], Катетова [1] и Раманатана [1] ****).

*) См. в связи с этим работу Скляренко [1] о совершенных бикомпактных расширениях. (*Прим. перев.*)

**) Хороший обзор теории бикомпактных расширений дан в статье П. С. Александрова [4]. (*Прим. перев.*)

***) В работе Пономарева [6] дано спектральное описание $\beta(X)$. (*Прим. перев.*)

****) Основным новым методом, введенным в теорию бикомпактных расширений и, к сожалению, ускользнувшим от внимания автора, является созданный П. С. Александровым метод центриро-