ЛЕММА ЛЕБЕГА О ПОКРЫТИИ

Очень полезна лемма Лебега, в которой утверждается, что для любого открытого покрытия $\mathfrak{U}$ замкнутого интервала вещественных чисел существует такое положительное число r, что если $|x-y|<r$, то в $\mathfrak{U}$ есть элемент, содержащий обе точки x и y. В каком-то смысле можно сказать, что $\mathfrak{U}$ покрывает рассматриваемый интервал «равномерно». В этом параграфе высказанное утверждение будет доказано вместе с его топологическим вариантом, пригодным для произвольных бикомпактных пространств. Последний результат может рассматриваться как прелюдия к идеям следующего параграфа, связанным с паракомпактностью.

ванных систем открытых множеств (П. С. Александров [4]), на полную универсальность которого впервые указал Фомин [2].

Метод этот широко применялся впоследствии многими математиками, в том числе Смирновым, Пономаревым, Илиадисом, Фоминым [2] и др. В частности, П. С. Александров и Пономарев дали этим методом простроение всех бикомпактных (хаусдорфовых) расширений данного тихоновского пространства, что, по существу, является лишь новой аранжировкой теоремы Смирнова [5] о близостях (см. работы: П. С. Александров и Пономарев [1], Илиадис и Фомин [1], а также уже цитированный обзор П. С. Александрова [4]).

Наконец, в связи с понятием бикомпактного расширения нельзя не указать на понятие H-замкнутого пространства и связанные с ним две характеризации бикомпактных пространств.

Хаусдорфово пространство называется H-замкнутым (П. С. Александров), если оно замкнуто во всяком объемлющем его хаусдорфовом пространстве.

В работе П. С. Александрова и Урысона [2] даны следующие два критерия бикомпактности, из которых второй во всей общности доказан впервые М. Стоуном [2]:

1. Хаусдорфово пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда оно регулярно и H-замкнуто (П. С. Александров и Урысон).

2. Хаусдорфово пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда всякое его замкнутое подмножество H-замкнуто.

Дальнейшие сведения об H-замкнутых пространствах (в частности, построение Фоминым максимального H-замкнутого расширения всякого хаусдорфова пространства) можно найти в новейшей работе Илиадиса и Фомина [1], где приведена обширная литература по ряду вопросов общей топологии, разрабатывавшихся в последнее время. (*Прим. перев.*)

26. Теорема. *Пусть* $\mathfrak{U}$ — *открытое покрытие бикомпактного подмножества* A *псевдометрического пространства* (X, d). *Тогда существует такое положительное число* r, *что открытый* r-*шар с центром в произвольной точке множества* A *содержится в некотором элементе покрытия* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — какое-нибудь конечное подпокрытие открытого покрытия $\mathfrak{U}$ множества A. Положим $f_i(x) = \operatorname{dist}[x, X \setminus U_i]$ и $f(x) = \max[f_i(x) : i = 1, \ldots, n]$. Каждая из функций f_i непрерывна, значит, непрерывна и функция f. Каждая точка множества A принадлежит некоторому U_i; следовательно, $f(x) \geqslant f_i(x) > 0$ для любой точки x из A. Тогда $f[A]$ — бикомпактное подмножество пространства положительных вещественных чисел; значит, существует вещественное число $r > 0$ такое, что $f(x) > r$ для всех x из A. Следовательно, для каждого $x \in A$ имеется такое i, что $f_i(x) > r$, откуда и вытекает, что открытый r-шар с центром в x лежит в U_i.

У доказанной теоремы есть интересное следствие. Если A — бикомпактное подмножество псевдометрического пространства и U — окрестность множества A, то для некоторого положительного r U содержит открытый r-шар с центром в произвольной точке множества A, что означает, что расстояние от A до множества $X \setminus U$ положительно *).

Теорему 5.26 можно удачно перефразировать. Пусть V — множество всех пар (x, y) точек пространства X, расстояние между которыми $d(x, y)$ меньше r. Тогда $V(x) = \{y : (x, y) \in V\}$ — просто открытый шар с центром в x. Множество V — открытое подмножество произведения $X \times X$, содержащее диагональ Δ (множество всех пар вида (x, x), где $x \in X$). Из предыдущей теоремы тогда вытекает такой топологический результат: если $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие бикомпактного псевдометрического пространства, то у диагонали в $X \times X$ есть такая окрестность V, что для любой точки $x \in X$ множество $V[x]$

---

*) См., в связи с этим, Архангельский [7], где показано, что это свойство псевдометрики топологически эквивалентно аксиоме треугольника. (*Прим. перев.*)

содержится в некотором элементе покрытия $\mathfrak{U}$. Оказывается, что в этой формулировке лемма Лебега справедлива для любого бикомпактного регулярного пространства.

Покрытие $\mathfrak{U}$ топологического пространства называется *однообразным* тогда и только тогда, когда у диагонали в $X \times X$ есть такая окрестность V, что для каждой точки x множество $V[x]$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathfrak{U}$. Иными словами, семейство всех множеств вида $V[x]$ вписано в $\mathfrak{U}$. Напомним, что покрытие $\mathfrak{A}$ именуется вписанным в $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда каждый элемент из $\mathfrak{A}$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{U}$, и что семейство $\mathfrak{B}$ множеств называется локально конечным в том и только в том случае, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов этого семейства. Говорят, что семейство множеств *замкнуто*, тогда и только тогда, когда каждый элемент этого семейства замкнут.

27. Теорема. *Если в открытое покрытие пространства можно вписать замкнутое локально конечное покрытие, то исходное покрытие однообразно.*

Следовательно, каждое открытое покрытие бикомпактного регулярного пространства однообразно.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие топологического пространства X и $\mathfrak{A}$ — вписанное в него замкнутое локально конечное покрытие. Для каждого A из $\mathfrak{A}$ выберем такой элемент U_A в $\mathfrak{U}$, что $A \subset U_A$, и пусть $V_A = (U_A \times U_A) \cup ((X \setminus A) \times (X \setminus A))$. Очевидно, V_A — открытая окрестность диагонали в $X \times X$, причем если $x \in A$, то $V_A[x] = U_A$. Положим $V = \bigcap \{V_A : A \in \mathfrak{A}\}$. Тогда для каждой точки x будет $V[x] \subset V_A[x] = U_A$ и, следовательно, семейство всех множеств вида $V[x]$ образует покрытие, вписанное в $\mathfrak{U}$. Остается доказать, что V — окрестность диагонали. Для каждой точки (x, x) диагонали найдем окрестность W точки x, пересекающуюся лишь с конечным числом элементов покрытия $\mathfrak{A}$. Если $W \cap A$ — пустое множество, то $W \subset X \setminus A$ и $W \times W \subset V_A$. Следовательно, V содержит пересечение множества $W \times W$ с некоторым конечным числом множеств V_A и потому является окрестностью точки (x, x).

Наконец, если X — бикомпактное регулярное пространство, то в каждое его открытое покрытие $\mathfrak{U}$ можно вписать замкнутое конечное покрытие (возьмем открытые множества, замыкания которых содержатся в элементах $\mathfrak{U}$). Следовательно, каждое открытое покрытие пространства X однообразно.

ПАРАКОМПАКТНОСТЬ *)

Топологическое пространство называется паракомпактным тогда и только тогда, когда оно регулярно и в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое локально конечное покрытие. Целью данного параграфа является доказательство эквивалентности паракомпактности ряду других условий. Мы пользуемся при этом методами, тесно связанными с методами главы 6.

Напомним, что семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства называется дискретным в том и только в том случае, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом этого семейства. Семейство $\mathfrak{A}$ σ-дискретно (σ-локально конечно) тогда и только тогда, когда оно является объединением счетного множества дискретных (соответственно локально конечных) подсемейств. Можно теперь сформулировать основной результат этого параграфа; доказательство его распадается в последовательность изложенных ниже лемм.

28. Теорема. *Если X — регулярное топологическое пространство, то следующие утверждения равносильны:*

---

*) В обычном определении паракомпактности вместо требования регулярности участвует требование хаусдорфовости. Нетрудно показать, что если в любое открытое покрытие хаусдорфова пространства можно вписать открытое локально конечное покрытие, то это пространство регулярно.

Вообще же свойство паракомпактности, заключающееся в существовании для каждого открытого покрытия вписанного в него локально конечного открытого покрытия, логически не зависит от каких бы то ни было аксиом отделимости (так же как и свойство бикомпактности). В русской литературе паракомпактные хаусдорфовы пространства принято называть паракомпактами. (*Прим. перев.*)