Наконец, если X — бикомпактное регулярное пространство, то в каждое его открытое покрытие $\mathfrak{U}$ можно вписать замкнутое конечное покрытие (возьмем открытые множества, замыкания которых содержатся в элементах $\mathfrak{U}$). Следовательно, каждое открытое покрытие пространства X однообразно.

ПАРАКОМПАКТНОСТЬ *)

Топологическое пространство называется паракомпактным тогда и только тогда, когда оно регулярно и в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое локально конечное покрытие. Целью данного параграфа является доказательство эквивалентности паракомпактности ряду других условий. Мы пользуемся при этом методами, тесно связанными с методами главы 6.

Напомним, что семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства называется дискретным в том и только в том случае, когда у каждой точки пространства есть окрестность, пересекающаяся самое большее с одним элементом этого семейства. Семейство $\mathfrak{A}$ σ-дискретно (σ-локально конечно) тогда и только тогда, когда оно является объединением счетного множества дискретных (соответственно локально конечных) подсемейств. Можно теперь сформулировать основной результат этого параграфа; доказательство его распадается в последовательность изложенных ниже лемм.

28. Теорема. *Если X — регулярное топологическое пространство, то следующие утверждения равносильны:*

---

*) В обычном определении паракомпактности вместо требования регулярности участвует требование хаусдорфовости. Нетрудно показать, что если в любое открытое покрытие хаусдорфова пространства можно вписать открытое локально конечное покрытие, то это пространство регулярно.

Вообще же свойство паракомпактности, заключающееся в существовании для каждого открытого покрытия вписанного в него локально конечного открытого покрытия, логически не зависит от каких бы то ни было аксиом отделимости (так же как и свойство бикомпактности). В русской литературе паракомпактные хаусдорфовы пространства принято называть паракомпактами. (*Прим. перев.*)

(а) *Пространство X паракомпактно.*

(б) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать локально конечное покрытие.*

(в) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое локально конечное покрытие.*

(г) *Каждое открытое покрытие пространства X однообразно.*

(д) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

(е) *В каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие.*

Вот план доказательства: (а) $\to$ (б) $\to$ (в) $\to$ (г) $\to$ $\to$ (д) $\to$ (е) $\to$ (б) $\to$ (а). Первое из этих следований ясно; второе обнаруживает следующая лемма:

29. Лемма. *Если пространство X регулярно и в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие, то в каждое открытое покрытие этого пространства можно вписать и некоторое замкнутое локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие пространства X. Тогда существует покрытие $\mathfrak{V}$, замыкания элементов которого содержатся в элементах покрытия $\mathfrak{U}$, ибо X регулярно. (Если $x \in U$, то у x есть открытая окрестность V, для которой $\overline{V} \subset U$.) Пусть $\mathfrak{A}$ — какое-нибудь локально конечное покрытие, вписанное в $\mathfrak{V}$. Тогда семейство $\mathfrak{B}$ замыканий элементов покрытия $\mathfrak{A}$ локально конечно; при этом каждое такое замыкание содержится в некотором $\overline{V}$, где $V \in \mathfrak{V}$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — замкнутое локально конечное покрытие пространства X, вписанное в $\mathfrak{U}$.

Если в некоторое открытое покрытие топологического пространства можно вписать замкнутое локально конечное покрытие, то исходное открытое покрытие однообразно согласно теореме 4.27. Из утверждения (в), таким образом, следует утверждение (г). Доказательству дальнейшего следования мы предпошлем две леммы, которые представляют и некоторый самостоятельный интерес. Напомним для удобства некоторые факты, которые нам сейчас понадобятся (см. параграф об отношениях в главе 0). Для подмножества U множества $X \times X$ и точки $x \in X$ через $U[x]$ обозначается множество всех

$y \in X$, для которых $(x, y) \in U$. Если A — подмножество множества X, то $U[A]=\{y : (x, y) \in U$ *для некоторого* x *из* $A\}$. Ясно, что $U[A]$ является объединением множеств вида $U[x]$ по всем x из A. Множество $\{(x, y) : (y, x) \in U\}$ обозначается через U^{-1}. Говорят, что U — симметричное множество, если $U=U^{-1}$. Множество $U \cap U^{-1}$ всегда симметрично. Через $U \circ V$, где U и V — подмножества множества $X \times X$, обозначается множество всех таких пар (x, z), что для некоторого y из X одновременно и $(x, y) \in V$ и $(y, z) \in U$. Иными словами, $(x, z) \in U \circ V$ тогда и только тогда, когда $(x, z) \in V^{-1}[y] \times U[y]$ для некоторого y. Следовательно, $U \circ V$ является объединением множеств вида $V^{-1}[y] \times U[y]$ по всем y из X. В частности, если V симметрично, то $V \circ V = \bigcup \{V[y] \times V[y] : y \in X\}$. Наконец, для каждого подмножества A множества X имеет место $U \circ V[A]=U[V[A]]$.

30. Лемма. *Пусть* X — *топологическое пространство, каждое открытое покрытие которого однообразно. Для любой окрестности* U *диагонали в* $X \times X$ *найдется такая симметричная окрестность* V *диагонали, что* $V \circ V \subset U$.

Доказательство. У каждой точки $x \in X$ есть такая окрестность $W(x)$, что $W(x) \times W(x) \subset U$, ибо U — окрестность диагонали. Семейство $\mathfrak{W}$ всех множеств вида $W(x)$ образует открытое покрытие пространства X. Поэтому существует окрестность R диагонали, для которой семейство $R[x]$ вписано в $\mathfrak{W}$. Тогда $R[x] \times R[x] \subset U$ при каждом x. Наконец, положим $V=R \cap R^{-1}$. Множество V — симметричная окрестность диагонали, и $V[x] \times V[x] \subset \subset U$ при всех x. Так как $V \circ V$ — объединение множеств вида $V[x] \times V[x]$, то $V \circ V \subset U$.

Интуитивное содержание предшествующей леммы таково. Скажем, что точки x и y удалены друг от друга не более чем на U, если $(x, y) \in U$. В лемме утверждается, что для любого U существует такое V, что коль скоро точки x, y и точки y, z удалены друг от друга не более чем на V, то точки x и z лежат одна от другой не далее чем на U.

Следующая лемма показывает, что паракомпактные пространства удовлетворяют очень сильному условию типа нормальности.

31. Лемма. *Пусть X — топологическое пространство, каждое открытое покрытие которого однообразно, и $\mathfrak{A}$ — локально конечное (или дискретное) семейство подмножеств пространства X. Тогда существует окрестность V диагонали в $X \times X$ такая, что семейство всех множеств $V[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, локально конечно (соответственно дискретно).*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — локально конечное семейство подмножеств. Тогда существует открытое покрытие $\mathfrak{U}$ пространства X, каждый элемент которого пересекается лишь с конечным множеством элементов семейства $\mathfrak{A}$. Пусть U — такая окрестность диагонали, что множества вида $U[x]$ вписаны в элементы покрытия $\mathfrak{U}$. В силу предыдущей леммы у диагонали есть такая окрестность V, что $V \circ V \subset U$; при этом можно предположить, что $V = V^{-1}$. Если множество $V \circ V[x] \cap A$ пусто, то $V[x]$ должно не пересекаться с $V[A]$, ибо если $y \in V[x] \cap$ $\cap V[A]$, то $(y, x) \in V^{-1} = V$, $(z, y) \in V$ для некоторого $z \in A$ и, следовательно, $(z, x) \in V \circ V$. Тогда $z \in V \circ V[x]$, в чем и состоит противоречие. Значит, если $V[x]$ пересекает $V[A]$, то $V \circ V[x]$ пересекает A, откуда следует, что семейство множеств вида $V[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, локально конечно. Если в приведенном рассуждении выражение «конечное число» заменить на слова «не более одного», то получится доказательство соответствующего утверждения для случая дискретного семейства.

Если V — открытое подмножество пространства $X \times X$, то $V[x]$ открыто для каждой точки $x \in X$, ибо $V[x]$ — прообраз множества V при непрерывном отображении, заключающемся в том, что точке $y \in X$ ставится в соответствие точка $(x, y) \in X \times X$. Для любого подмножества A пространства X множество $V[A]$ открыто, ибо оно является объединением множеств вида $V[x]$ по всем x из A. Таким образом, предшествующая лемма позволяет продолжать локально конечные и дискретные семейства множеств до локально конечных (соответственно дискретных) семейств открытых множеств. В частности, если в каждое открытое покрытие $\mathfrak{U}$ некоторого регулярного пространства можно вписать локально конечное покрытие $\mathfrak{A}$, то применима доказанная лемма (мы показали, что (б)$\rightarrow$(в)$\rightarrow$(г) в 5.28). Поэтому существует такая окрестность диагонали, что семейство всех множеств вида $V[A]$, где $A \in \mathfrak{A}$, локально конечно. Последнее семейство может не быть вписанным в $\mathfrak{U}$, однако это затруднение легко преодолеть: выберем в $\mathfrak{U}$ для каждого множества A из семейства $\mathfrak{A}$ какой-нибудь содержащий его элемент $U_A \in \mathfrak{U}$ и положим $W_A = U_A \cap V[A]$. Построенное описанным способом семейство открыто, локально конечно, вписано в $\mathfrak{U}$ и покрывает рассматриваемое пространство; значит, последнее паракомпактно. Доказано, таким образом, следование (б)$\to$(а) из 5.28.

Утверждение 5.31 имеет очевидное следствие. Семейство, состоящее из двух замкнутых непересекающихся множеств, разумеется, дискретно. Значит,

32. Следствие. *Каждое паракомпактное пространство нормально.*

Доказательство теоремы 5.28 будет завершено, если мы установим два факта. Первый: пусть каждое открытое покрытие некоторого регулярного пространства однообразно; тогда в любое его открытое покрытие можно вписать открытое σ-дискретное покрытие. Второй: если в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать σ-локально конечное покрытие, то в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. (Отсюда, очевидно, вытекает следование (д)$\to$(е) утверждений из 5.28.)

33. Лемма. *Если каждое открытое покрытие пространства X однообразно, то в каждое открытое покрытие пространства X можно вписать открытое σ-дискретное покрытие.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения, подобно доказательству теоремы 4.21, получается применением одной идеи А. Стоуна. (Можно вывести данную лемму из утверждения 4.21 и результатов главы 6.) В силу леммы 5.31 достаточно найти какое-нибудь σ-дискретное покрытие, вписанное в $\mathfrak{U}$, так как затем это покрытие можно «расширить» до вписанного в $\mathfrak{U}$ σ-дискретного открытого покрытия. Пусть V — такая окрестность диагонали, что семейство всех множеств вида $V[x]$, где $x \in X$, вписано в покрытие $\mathfrak{U}$. Положим $V_0 = V$ и, действуя по индукции, выберем в качестве V_n такую открытую симметричную окрестность диагонали, что $V_n \circ V_n \subset V_{n-1}$ при каждом целом положительном n. Положим $U_1 = V_1$, и по индукции пусть $U_{n+1} = V_{n+1} \circ U_n$. Легко видеть, что $U_n \subset V_0$ при каждом n. Отсюда следует, что для каждого n семейство всех $U_n[x]$, где $x \in X$, вписано в $\mathfrak{U}$. Вполне упорядочим множество X с помощью некоторого отношения $<$ (см. 0.25). Обозначим для каждого x и каждого n через $U_n^*(x)$ множество $U_n[x] \setminus \bigcup \{U_{n+1}[y] : y < x\}$. При каждом фиксированном n семейство $\mathfrak{U}_n$ всех множеств вида $U_n^*(x)$ дискретно; это можно доказать следующим образом. Ясно, что множество $U_n^*(x)$ не пересекается с множеством $V_{n+1}[U_n^*(y)]$ при $x \neq y$ по построению. Если для некоторой точки $z \in X$ окрестность $V_{n+1}[z]$ пересекает $U_n^*(y)$, то $z \in V_{n+1}[U_n^*(y)]$ и $V_{n+1}[U_n^*(y)]$ является окрестностью точки z, не пересекающейся ни с одним $U_n^*(x)$, для которого $x \neq y$. Следовательно, семейство $\mathfrak{U}_n$ дискретно. Остается доказать, что каждая точка пространства X принадлежит некоторому элементу некоторого семейства $\mathfrak{U}_n$. Пусть $x \in X$ и y — первая точка из X, для которой x принадлежит множеству $U_n[y]$ при некотором n. Тогда непременно $x \in U_n^*(y)$ при том же n.

34. Лемма. *Если в каждое открытое покрытие пространства можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие, то в каждое покрытие этого пространства можно вписать и локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — открытое покрытие и $\mathfrak{V}$ — вписанное в него открытое σ-локально конечное покрытие, т. е. $\mathfrak{V} = \bigcup \{\mathfrak{V}_n : n \in \omega\}$, где каждое $\mathfrak{V}_n$ — локально конечное семейство открытых множеств, содержащихся в элементах покрытия $\mathfrak{U}$. Для каждого n и каждого $V \in \mathfrak{V}_n$ положим $V^* = V \setminus \bigcup \{U : U \in \mathfrak{V}_k$ *для некоторого* $k < n\}$ и обозначим через $\mathfrak{W}$ семейство всех V^*. Семейство $\mathfrak{W}$ покрывает X и вписано в $\mathfrak{U}$. Наконец, пусть $x \in X$ и n — наименьшее целое число такое, что x принадлежит некоторому V из $\mathfrak{V}_n$. Тогда V — окрестность точки x, не пересекающаяся ни с одним элементом семейства $\mathfrak{W}$, за исключением построенных на основе тех $\mathfrak{V}_k$, для которых $k \leqslant n$. Следовательно, покрытие $\mathfrak{W}$ локально конечно.

В теореме 4.21 говорится, что в любое открытое покрытие псевдометризуемого пространства можно вписать открытое σ-дискретное покрытие. Этот факт вместе с теоремой 28 настоящего параграфа приводит к следующему выводу:

35. С л е д с т в и е. *Каждое псевдометризуемое пространство паракомпактно.*

В заключение следует отметить, что подпространства, фактор-пространства и произведения паракомпактных пространств обычно бывают не паракомпактны. Далее, пространство может быть локально метризуемо, локально бикомпактно, хаусдорфово, нормально (значит, удовлетворять первой аксиоме счетности) и все же не быть паракомпактным. Стандартные примеры можно найти в упражнениях в конце этой главы.

36. З а м е ч а н и я. Есть еще одна характеристика паракомпактности, которой можно было бы пополнить список, данный в 5.28. Для регулярных пространств паракомпактность эквивалентна звездной нормальности (см. задачу 5.Ц). Этот критерий принадлежит А. С т о у н у [1] *). Эквивалентность утверждений (б), (в), (д) и (е) теоремы 5.28 была доказана М а й к л о м [2]. Равносильность же условия (г) и паракомпактности впервые была замечена, насколько я знаю, Дж. С. Гриффином и мной.

Описание паракомпактности в терминах σ-дискретных открытых покрытий в равной мере естественно принять за определение счетномерности (см. Г у р е в и ч и У о л м е н [1; 32], и Э й л е н б е р г [1]) **). Теорема Майкла (М а й к л [2]) о наследовании паракомпактности по подмножествам типа F_σ интерпретируется при этом как естественный результат теории размерности.

*) Несомненно, теорема Стоуна является самой замечательной теоремой о паракомпактности. Вообще паракомпактным пространствам в новейшее время посвящена обширная литература, включающая работы Майкла, Исбелла, Пономарева, Архангельского и многих других. (*Прим. перев.*)

**) В настоящее время счетномерными считаются пространства, распадающиеся в сумму счетного семейства нульмерных подпространств. В этом смысле не каждое метрическое пространство счетномерно. (*Прим. перев.*)