ЗАДАЧИ

А. Упражнение на вещественные функции, определенные на бикомпактных пространствах

(а) Если A — непустое бикомпактное подмножество пространства вещественных чисел, то и наименьшая верхняя, и наибольшая нижняя грань множества A принадлежат A.

(б) Каждая непрерывная функция f, определенная на бикомпактном пространстве, достигает своего наибольшего и наименьшего значений, т. е. в этом пространстве существуют такие точки x и y, что $f(x)$ и $f(y)$ являются соответственно наименьшей верхней и наибольшей нижней гранями функции f на X.

(в) Пусть f — непрерывная вещественная функция на бикомпактном пространстве X. Если f везде положительна, то она отграничена от нуля в том смысле, что существует такое $e>0$, что $f(x)>e$ для всех x из X.

Б. Бикомпактные подмножества

(а) Пересечение двух бикомпактных подмножеств топологического пространства может не быть бикомпактно. Пересечение любого семейства замкнутых бикомпактных множеств непременно замкнуто и бикомпактно. (Ясно, что пространство, в котором лежат бикомпактные подмножества с небикомпактным пересечением, не может быть хаусдорфовым. Такие множества можно найти в произведении пространства вещественных чисел и антидискретного пространства, состоящего из двух точек.)

(б) Замыкание бикомпактного подмножества топологического пространства может не быть бикомпактно. Однако в регулярном пространстве замыкание бикомпактного подмножества непременно бикомпактно.

(в) Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества псевдометрического пространства, причем A бикомпактно. Тогда существует точка x в A, для которой $\operatorname{dist}(A, B)=\operatorname{dist}(x, B)>0$. (Дело в том, что функция $\operatorname{dist}(x, B)$ непрерывна и положительна во всех x из A.)

(г) Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые бикомпактные подмножества псевдометрического пространства. Тогда существуют такие точки $x \in A$ и $y \in B$, что $d(x, y)=\operatorname{dist}(A, B)$.

В. Бикомпактность относительно топологии порядка

Пусть множество X линейно упорядочено отношением $<$ и наделено порядковой топологией (см. задачу 1.И). Тогда (П. С. Александров [1]) каждое замкнутое ограниченное подмножество пространства X бикомпактно тогда и только тогда, когда X полно относительно порядка $<$. (Семейство всех подмножеств X вида $\{x : a<x\}$ или $\{x : x<a\}$ образует предбазу порядковой топологии на X; можно применить теорему 5.6 Александера о предбазе. Можно

доказать этот факт, не прибегая к теореме 5.6, рассуждением, похожим на доказательство теоремы 5.14*).)

Г. Изометрии бикомпактных метрических пространств

Пусть X и Y — метрические пространства, причем пространство X бикомпактно, и f — изометрия пространства X на подпространство пространства Y, а g — изометрия пространства Y на подпространство пространства X. Тогда f отображает X на все Y. (Пусть h — изометрия пространства X на его собственную часть и $x \in X \setminus h[X]$. Положим $a = \operatorname{dist}(x, h[X])$. Определим по индукции последовательность точек, начинающуюся с $x_0 = x$, правилом: $x_{n+1} = h(x_n)$. Докажите, что при $m \neq n$ будет $d(x_m, x_n) \geqslant a$.)

Д. Счетно компактные и секвенциально компактные пространства

Топологическое пространство называется *счетно компактным* тогда и только тогда, когда каждое его счетное открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Пространство называется *секвенциально компактным* тогда и только тогда, когда в каждой последовательности его точек есть сходящаяся подпоследовательность.

Следующие свойства T_1-пространства X эквивалентны его счетной компактности:

(а) Каждая последовательность в X имеет предельную точку.

(б) Каждое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку (см. 5.3).

(в) В каждом бесконечном открытом покрытии X есть собственное подпокрытие. (Если A — бесконечное множество, у которого нет ни одной предельной точки, то каждое подмножество множества A замкнуто. Определим некоторое открытое покрытие $\mathfrak{U}$, взяв у каждой точки множества A открытую окрестность, не содержащую других точек из A, и присоединив, если нужно, к полученной системе множеств множество $X \setminus A$. Тогда в покрытии $\mathfrak{U}$ не содержится никакого меньшего покрытия. С другой стороны, если в открытом покрытии $\mathfrak{V}$ не содержится никакого меньшего покрытия, то в каждом элементе $V \in \mathfrak{V}$ есть точка, не принадлежащая никакому другому элементу покрытия $\mathfrak{V}$.)

(г) Для пространств с первой аксиомой счетности секвенциальная компактность и счетная компактность эквивалентны между собой (5.5).

(д) Пространство Ω_0 всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа Ω, локально бикомпактно, хаусдорфово, удовлетворяет первой аксиоме счетности, секвенциально компактно, но не бикомпактно.

Замечание. Предложение (в) принадлежит Аренсу и Дугунджи [1].

---

*) В последнее время теория упорядоченных топологических пространств далеко продвинута в работах Мардешича и Папича [1], Федорчука [1], Лифанова [1] и др. (*Прим. перев.*)

Е. Бикомпактность; пересечение бикомпактных связных множеств

(а) Пусть $\mathfrak{A}$ — такое семейство замкнутых бикомпактных множеств, что $\bigcap \{A : A \in \mathfrak{A}\}$ — подмножество открытого множества U. Тогда для некоторого конечного подсемейства $\mathfrak{F}$ семейства $\mathfrak{A}$ будет $\bigcap \{A : A \in \mathfrak{F}\} \subset U$.

(б) Если $\mathfrak{A}$ — семейство бикомпактных подмножеств хаусдорфова пространства X, причем пересечение любого конечного числа элементов $\mathfrak{A}$ связно, то множество $\bigcap \{A : A \in \mathfrak{A}\}$ связно.

Ж. Упражнение на локальную бикомпактность

Если X — хаусдорфово пространство и Y — плотное в нем локально бикомпактное подпространство, то Y открыто в X.

З Характеристика бикомпактности в терминах гнезд

Топологическое пространство X бикомпактно тогда и только тогда, когда каждое гнездо его замкнутых непустых подмножеств имеет непустое пересечение. (Напомним, что гнездом называется семейство множеств, линейно упорядоченное по включению. Пусть каждое гнездо замкнутых непустых множеств имеет непустое пересечение и $\mathfrak{A}$ — некоторое центрированное семейство замкнутых множеств. Обозначим через $\mathfrak{B}$ какое-нибудь максимальное центрированное семейство замкнутых множеств, содержащее $\mathfrak{A}$, и пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое максимальное гнездо в $\mathfrak{B}$. Исследуя свойства $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{N}$, мы приходим к доказательству. Совершенно другое доказательство можно дать, прибегнув к вполне упорядоченности, с помощью процедуры, указанной в следующей задаче.)

И. Точки полного накопления (П. С. Александров)

Точка x называется *точкой полного накопления* подмножества A топологического пространства в том и лишь в том случае, когда для каждой окрестности U точки x множества A и $A \cap U$ имеют одинаковую мощность. Имеет место следующая теорема П. С. Александрова *). Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда у каждого его бесконечного подмножества в этом пространстве есть точка полного накопления. (Пусть X — небикомпактное пространство. Возьмем открытое покрытие $\mathfrak{A}$ пространства X наименьшей возможной мощности c, не содержащее никакого конечного подпокрытия. Пусть C — некоторое вполне упорядоченное множество мощности c такое, что множество элементов, предшествующих произвольному элементу этого множества, имеет мощность, меньшую c. (В приложении показано, что таково множество c.) Пусть f — какое-нибудь взаимно однозначное отображение множества C на множество $\mathfrak{A}$. Тогда, каков бы ни был элемент $b \in C$, объединение $\bigcup \{f(a) : a < b\}$ не покрывает пространства X; в действительности дополнение до этого объединения должно иметь мощность, не меньшую c. Поэтому из каждого

*) Последняя фраза добавлена переводчиком.

такого дополнения можно выбрать по точке x_b так, чтобы было $x_a \neq x_b$ при $a<b$. Рассмотрите множество всех x_b.)

К. Пример: единичный квадрат в лексикографическом упорядочении (П. С. Александров и Урысон [2])

Пусть X — декартово произведение замкнутого единичного интервала Q на себя, упорядоченное лексикографически (т. е. $(a, b) < < (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a<c$ или $a=c$ и $b<d$). Множество X, наделенное топологией, индуцированной порядком, становится бикомпактным связным хаусдорфовым пространством. Оно удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабельно и, следовательно, не метризуемо.

Л. Пример (порядковые числа) на нормальность и произведения

Произведение локально бикомпактного нормального хаусдорфова пространства и бикомпактного хаусдорфова пространства может не быть нормально. (Трудная часть доказательства уже изложена в задаче 4.Д; надо только показать, что Ω' и Ω_0 — бикомпактное и локально бикомпактное хаусдорфовы пространства соответственно. Здесь Ω' — множество порядковых чисел, меньших или равных Ω, и Ω_0 — его подмножество, состоящее из порядковых чисел, меньших Ω; оба они берутся в порядковой топологии.)

М. Трансфинитная прямая *)

Пусть A — вполне упорядоченное множество, $[0,1)$ — полуинтервал с обычной топологией, а произведение $A \times [0,1)$ взято в лексикографическом упорядочении и наделено порядковой топологией. Исследуйте свойства этого пространства.

Н. Пример: пространство Хелли

Пространство Хелли H состоит из всех неубывающих функций, определенных на замкнутом единичном интервале Q со значениями в Q. Будучи подмножеством пространства произведения Q^Q, оно наделяется топологией, индуцированной из этого произведения. Пространство H обладает следующими свойствами:

(а) H — бикомпактное хаусдорфово пространство. (Оно замкнуто в Q^Q.)

(б) В H выполнена первая аксиома счетности; следовательно, оно секвенциально компактно. (Множество точек разрыва каждой функции из H счетно. Это обстоятельство и тот факт, что Q — сепарабельное пространство, следует применить при построении счетной определяющей системы окрестностей произвольной точки h в пространстве H.)

(в) H сепарабельно. (Счетное плотное в нем множество можно построить, исходя из множества рациональных чисел.)

(г) H не метризуемо. (Для каждого t из Q определим $f_t(x)$ как 0 при $x<t$, 1 при $x>t$ и положим $f_t(t)=\frac{1}{2}$. Семейство A всех

*) Широко принят термин «прямая Александрова». (*Прим. перев.*)

функций вида f_t несчетно, и никакая точка множества A не является предельной для A. В то же время каждое подпространство бикомпактного метрического пространства сепарабельно.)

О. Примеры на замкнутые отображения и локальную бикомпактность

(а) Пусть X — пространство вещественных чисел с обычной топологией, I — множество целых чисел и $\mathfrak{D}$ — разбиение, элементами которого являются множество I и все одноточечные множества $\{x\}$, где $x \in X \setminus I$. Тогда проектирование пространства X на фактор-пространство замкнуто и непрерывно, но фактор-пространство не локально бикомпактно и не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

(б) Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших Ω, с порядковой топологией, A — его замкнутое несчетное подмножество, дополнение к которому тоже несчетно, и $\mathfrak{D}$ — разбиение, элементами которого являются A и все множества вида $\{x\}$, где $x \in \Omega_0 \setminus A$. Тогда проектирование пространства Ω_0 на фактор-пространство непрерывно и замкнуто, причем фактор-пространство бикомпактно, но первая аксиома счетности в нем не выполняется. (Примените лемму о чередовании 4.Д.)

П. Канторовы пространства

Канторовым дисконтинуумом (*канторовым множеством*) называется множество всех точек замкнутого единичного интервала, в троичном разложении которых отсутствует единица. (На протяжении всей формулировки этой задачи удобно пользоваться только иррациональными троичными разложениями, не равными нулю тождественно, начиная с некоторого момента. Каждое вещественное число имеет единственное иррациональное разложение, как отмечалось в 0.14.) Вот простое описание канторова дисконтинуума. Открытый интервал длины $\frac{1}{3}$, лежащий посередине отрезка $[0, 1]$, — это в точности множество тех чисел, в троичном разложении которых на первом месте после запятой стоит единица. Средняя треть каждого из оставшихся отрезков состоит из точек, в троичном разложении которых единица стоит не на первом, а на втором месте. Продолжая рассуждение, мы выясняем, что канторово множество можно получить, последовательно выкидывая средние трети.

Пространство произведения 2^A (т. е. множество всевозможных отображений множества A в дискретное пространство, единственными элементами которого являются 0 и 1, наделенное топологией произведения) называется *канторовым пространством* *).

(а) Канторов дисконтинуум гомеоморфен пространству 2^ω. (Произвольному x из 2^ω поставим в соответствие тот элемент $f(x)$ отрезка $[0, 1]$, в троичном разложении которого на p-м месте стоит $2x(p)$.)

---

*) В русской литературе принято название *обобщенный канторов дисконтинуум*. (*Прим. перев.*)

(б) Каждая точка канторова множества является предельной для него, а дополнение к дисконтинууму является открытым всюду плотным подмножеством пространства вещественных чисел.

(в) Для любого замкнутого непустого подмножества A пространства 2^{ω} существует непрерывное отображение r пространства 2^{ω} в A такое, что $r(x)=x$ при всех x из A *). (Усмотреть доказательство немного легче, если исходить из канторова дисконтинуума, гомеоморфного пространству 2^{ω}.)

(г) Каждое бикомпактное хаусдорфово пространство является непрерывным образом замкнутого подмножества некоторого канторова пространства (П. С. Александров [3]). (Пусть F — семейство всех таких многозначных отображений множества $\{0; 1\}$ в X, что $f(0) \cup f(1) = X$. $f(x_f)$ — замкнутое подмножество пространства X для любого x из 2^F и $f \in F$. Пересечение $\bigcap \{f(x_f) : f \in F\}$ пусто или состоит ровно из одной точки; в последнем случае эта точка принимается за $\varphi(x)$. Можно проверить, что областью определения отображения φ является некоторое замкнутое подмножество пространства 2^F. Для каждого подмножества U пространства X имеем $\varphi^{-1}[U] = \{x : x$ *принадлежит области определения* φ *и* $\bigcap \{f(x_f) : f \in F\} \subset U\}$.)

(д) Каждое бикомпактное метрическое пространство X является непрерывным образом канторова множества 2^{ω} (П. С. Александров [3]). (Вместо семейства F, определенного выше, можно взять меньшее семейство, способное играть ту же роль. Пусть $U_0, \ldots, U_n$ — база топологии пространства X; положим $f_n(0) = \bar{U}_n$, $f_n(1) = X \setminus U_n$.)

(е) Каждое канторово пространство 2^A удовлетворяет отрицательной аксиоме счетности: каждое семейство его непересекающихся открытых подмножеств счетно. (Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство непересекающихся открытых подмножеств пространства 2^A. Можно предположить, что элементы $\mathfrak{U}$ принадлежат определяющей базе топологии произведения. Таким образом, каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ является пересечением конечного числа полупространств в естественном смысле. Тогда для некоторого целого числа n найдется бесконечное (в действительности даже несчетное) семейство непересекающихся подмножеств, каждый элемент которого является пересечением в точности n полупространств. Несложное рассуждение, учитывающее тот факт, что подмножества семейства не пересекаются, завершает доказательство.

Существует более короткое и более формальное доказательство этого факта. Канторово пространство относительно покоординатного сложения по модулю 2 образует бикомпактную топологическую группу. Следовательно, на нем существует мера Хаара (см. Халмош [1], стр. 254). Так как эта мера конечна и положительна на открытых множествах, то ясно, что отрицательная аксиома счетности должна выполняться.)

---

*) Иначе говоря, A является *ретрактом* пространства 2^{ω}. (*Прим. перев.*)

(ж) Не каждое бикомпактное хаусдорфово пространство является непрерывным образом канторова множества. (Расширение несчетного дискретного пространства до бикомпакта путем присоединения одной точки не удовлетворяет отрицательной аксиоме счетности.)

Замечание. Предложение (б) принадлежит Кантору, предложение (д) — П. С. Александрову, а утверждение (е) и (ж) получены Тьюки. Утверждение (ж) вытекает также из некоторых результатов Шпильрайна [1].

Замечание переводчика. Хаусдорфовы пространства, являющиеся непрерывными образами канторовых пространств, выделены П. С. Александровым под названием диадических бикомпактов. В настоящее время им посвящена обширная литература, включающая работы П. С. Александрова, В. И. Пономарева, Б. А. Ефимова, Энгелькинга, Пелчинского и др. Необходимо упомянуть и более старые работы Н. А. Шанина и А. С. Есенина-Вольпина, а также замечательную теорему, доказанную независимо друг от друга Л. Н. Ивановским и В. И. Кузьминовым и утверждающую, что пространство каждой бикомпактной топологической группы является диадическим бикомпактом.

Р. Характеристика бикомпактного расширения Стоуна—Чеха

Пусть (f, Y) — такое бикомпактное хаусдорфово расширение топологического пространства X, что для каждой непрерывной вещественной функции g на X функцию $g \circ f^{-1}$ можно непрерывно продолжить на пространство Y. Тогда расширение (f, Y) топологически эквивалентно расширению Стоуна — Чеха $(e, \beta(X))$. (Взгляните на определение $\beta(X)$.)

С. Пример (порядковые числа) на бикомпактные расширения

Пусть Ω' — множество всех порядковых чисел, меньших или равных Ω, и $\Omega_0 = \Omega' \setminus \{\Omega\}$. Каждое из этих множеств наделим топологией, индуцированной порядком. Оказывается, что тогда бикомпактное расширение Стоуна — Чеха $\beta(\Omega_0)$ гомеоморфно Ω'. (Это будет следовать из результата предшествующей задачи, если доказать, что каждая ограниченная вещественная непрерывная функция f на Ω_0 начиная с некоторого момента постоянна*) в том смысле, что существует $x \in \Omega_0$, для которого $f(y) = f(x)$ при $y > x$. Пусть f — ограниченная непрерывная вещественная функция на Ω_0 и r, s — вещественные числа, $r > s$. Лемма о чередовании 4.Д показывает, что хотя бы одно из множеств $\{x : f(x) \geqslant r\}$ и $\{x : f(x) \leqslant s\}$ счетно. Пользуясь этим фактом, нетрудно доказать, что функция f с некоторого момента постоянна. Предположение о том, что f — ограниченная функция, в действительности несущественно.)

Замечание. Этот результат принадлежит Смирнову [1].

---

*) Хьюитт [1] применил это любопытное свойство пространства Ω_0 при построении регулярного хаусдорфова пространства X, на котором каждая непрерывная вещественная функция постоянна.

Т. Бикомпактное расширение Уолмена

Пусть X — T_1-пространство, $\mathfrak{F}$ — семейство всех его замкнутых подмножеств и $\omega(X)$ — совокупность всех максимальных центрированных подсемейств $\mathfrak{A}$ семейства $\mathfrak{F}$.

(а) Если $\mathfrak{A} \in \omega(X)$, то пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{A}$ снова является его элементом. Двойственное утверждение: если A и B принадлежат $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$, то и $A \cup B$ принадлежит $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{A}$ (см. задачу 2. И).

(б) Для каждой точки $x \in X$ положим $\varphi(x) = \{A : A \in \mathfrak{F}$ *и* $x \in A\}$ Тогда φ — взаимно однозначное отображение пространства X в множество $\omega(X)$.

(в) Для каждого открытого в X множества U положим $U^* = \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \in \omega(X)$ *и* $A \subset U$ *для некоторого* A *из* $\mathfrak{A}\}$. Тогда $\omega(X) \setminus U^* = \{\mathfrak{A} : X \setminus U \in \mathfrak{A}\}$. Для любых открытых в X множеств U и V имеем $(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$ и $(U \cup V)^* = U^* \cup V^*$.

(г) Наделим $\omega(X)$ топологией, базой которой служит семейство всех множеств вида U^*, где U — любое открытое в X множество. Пространство $\omega(X)$ бикомпактно, отображение φ непрерывно *) и $\varphi(X)$ всюду плотно в $\omega(X)$ (Для доказательства бикомпактности пространства $\omega(X)$ рассмотрите центрированные системы дополнений к элементам определенной нами базы.)

(д) Если пространство X нормально, то $\omega(X)$ — хаусдорфово пространство.

(е) Если f — ограниченная непрерывная вещественная функция на X, то $f \circ \varphi^{-1}$ можно продолжить до непрерывной функции, определенной на всем $\omega(X)$. (Если бы непрерывное продолжение было невозможно, то можно было бы легко показать, что в пространстве вещественных чисел существуют такие замкнутые непересекающиеся подмножества R и S, что множества $f^{-1}[R]$ и $f^{-1}[S]$ не пересекаются, но замыкания их образов при отображении φ пересекаются. Но если A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X, то множества $\{\mathfrak{A} : A \in \mathfrak{A}\}$ и $\{\mathfrak{A} : B \in \mathfrak{A}\}$ замкнуты в $\omega(X)$ и не пересекаются.)

(ж) Если $\omega(X)$ — хаусдорфово пространство, то оно топологически эквивалентно бикомпактному расширению Стоуна — Чеха пространства X (см. 5.Р).

Замечания. Принципиальное значение расширения Уолмена (Уолмен [1]) состоит в том, что соответствие $U \to U^*$ сохраняет конечные пересечения и объединения. Далее, при этом соответствии топология на X переходит в базу топологии $\omega(X)$, а отсюда следует, что размерности пространств X и $\omega(X)$ совпадают и что группы гомологий Александрова — Чеха **) пространств X и $\omega(X)$

---

*) Важно, что не только φ непрерывно, но непрерывно и φ^{-1}; таким образом, φ — «гомеоморфизм в». (*Прим. перев.*)

**) Эти группы называются еще группами спектральных гомологий. Они основаны на фундаментальном понятии нерва, введенном П. С. Александровым, и для компактов были впервые определены Александровым. Чех перенес их на общие топологические пространства. (Автор несправедливо называет эти группы группами гомологий Чеха.) (*Прим. перев.*)

изоморфны. См. работу Самюэля [1] по поводу одного построения, связанного с этой конструкцией *).

У. Булевы кольца: теорема М. Стоуна о представлении

Пусть $(R, +, \cdot)$ — булево кольцо (см. 2.Л) и S' — множество всех кольцевых гомоморфизмов кольца R в I_2 (фактор целых чисел по mod 2). Положим $S=S'\setminus\{0\}$, где 0 обозначает тривиальный гомоморфизм всего кольца R в нуль. Множество S' является подмножеством произведения I_2^R.

Стоуновским пространством кольца R называется множество S, наделенное топологией, индуцированной из произведения (I_2 берется с дискретной топологией).

Булевым пространством называется хаусдорфово пространство, в котором семейство всех множеств, одновременно открытых и бикомпактных, образует базу. Каждое булево пространство автоматически локально бикомпактно. *Характеристическое кольцо* булева пространства — это кольцо всех его непрерывных отображений f в I_2, для которых множество $f^{-1}[1]$ бикомпактно (таким образом, речь идет обо всех функциях со значениями в I_2, обращающихся в нуль вне некоторого бикомпактного множества, — иногда такие функции называют функциями с бикомпактным носителем).

(а) Стоуновское пространство булева кольца R является булевым пространством; оно бикомпактно, коль скоро в R есть единица. (В этом случае $S=\{h : h\in S' \text{ и } h(1)=1\}$.)

(б) Теорема Вейерштрасса — Стоуна по mod 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *характеристическое кольцо булева пространства* X *и* $\mathfrak{G}$ — *подкольцо кольца* $\mathfrak{F}$, *обладающее свойством двух точек (это означает, что для любых различных* x *и* y *из* X *и любых* a, b *из* I_2 *существует* g *в* $\mathfrak{G}$ *такое, что* $g(x)=a$ *и* $g(y)=b$). *Тогда* $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}$.

(Если X бикомпактно, то $\mathfrak{F}$ обладает свойством двух точек всегда, когда $1\in\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}$ различает точки в том смысле, что для любых двух разных точек x, y пространства X существует такое $g\in\mathfrak{G}$, что $g(x)\neq g(y)$. В основе доказательства утверждения (б) лежит стандартное, хотя и вполне содержательное, рассуждение о бикомпактности. Можно было бы начать с доказательства того, что, каковы бы ни были бикомпактное подмножество Y пространства X и точка $x\in X\setminus Y$, существует функция g в $\mathfrak{G}$, равная нулю в x и равная единице на Y.)

(в) Теорема о представлении. *Каждое булево кольцо изоморфно (посредством отображения вычисления) характеристическому кольцу своего стоуновского пространства.* (Произвольному элементу r кольца R соответствует вычисление в r — определенная на пространстве S функция $e(r)$, значение которой в произвольной

---

*) Интересный аналог расширения Уолмена построен Пономаревым [1] под названием пространства $w_\varkappa(X)$, отличающегося от $w(X)$ тем, что точками $w_\varkappa(X)$ являются максимальные центрированные системы $\xi=\{C_\alpha\}$ канонических замкнутых множеств $C_\alpha=\overline{C_\alpha^0}$ пространства X. Ряд любопытных свойств пространства $w_\varkappa(X)$ установил Зайцев [1]. (*Прим. перев.*)

точке $s \in S$ равно $s(r)$. Эта теорема основывается на теореме о существовании достаточного числа гомоморфизмов (см. 2.Л) и на предшествующем утверждении (б).)

(г) Если X — булево пространство, $\mathfrak{F}$ — его характеристическое кольцо и $\mathfrak{J}$ — максимальный собственный идеал в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{J} = \{f : f(x) = 0\}$ для некоторой точки x из X. (Покажите прежде всего, что если не существует точки, в которой обращаются в нуль все элементы из $\mathfrak{J}$, то $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$.)

(д) Двойственная теорема о представлении. *Каждое булево пространство X гомеоморфно (посредством отображения вычисления) стоуновскому пространству своего характеристического кольца.* (Произвольный максимальный идеал есть множество нулей однозначно соответствующего ему гомоморфизма в I_2, причем каждое такое множество нулей является максимальным идеалом. Предшествующее утверждение (г), по существу, означает, что вычисление отображает X на все стоуновское пространство.)

Замечания. Сформулированные выше результаты принадлежат М. Стоуну [1].

У процесса представления булева пространства есть любопытная разновидность. Пусть X — булево пространство и $\mathfrak{F}$ — кольцо всех его непрерывных отображений в пространство I_2. (Мы не требуем теперь, чтобы множество $f^{-1}[1]$ было бикомпактно.) Отображение вычисления пространства X в стоуновское пространство S кольца $\mathfrak{F}$ снова оказывается гомеоморфизмом, но S уже бикомпактно и в действительности гомеоморфно $\beta(X)$ — расширению Стоуна — Чеха пространства X. Мы опускаем доказательство этого факта, равно как и доказательства характеристик идеалов и подколец булева кольца в терминах стоуновских пространств.

Наконец, наш подход ко всей этой проблематике дает возможность построить по той же схеме рассуждение об алгебре всех непрерывных вещественных функций f, определенных на произвольном локально бикомпактном хаусдорфовом пространстве X, таких, что для любого $e>0$ множество $\{x : |f(x)| \geqslant e\}$ бикомпактно. Самым трудным шагом в этом рассуждении является доказательство теоремы Вейерштрасса — Стоуна (7.Р), с которой в миниатюре мы познакомились в утверждении (б). Оказывается также, что если X — тихоновское пространство, то пространство всех вещественных гомоморфизмов алгебры ограниченных непрерывных функций, определенных на X, гомеоморфно $\beta(X)$, — ситуация здесь очень напоминает положение вещей, описанное в предыдущем абзаце.

Ф. Связные бикомпактные пространства (рассуждения с цепочками)

Пусть (X, d) — бикомпактное псевдометрическое пространство и e — произвольное положительное число. Назовем *e-цепью* от точки x пространства X до точки $y \in X$ любую конечную последовательность точек, первым элементом которой служит x, последним y и расстояние между любыми двумя последовательными элементами которой меньше e. Для каждого подмножества A пространства X рассматривается множество $C_e(A)$, состоящее из всех точек, соединимых e-цепью хотя бы с одной точкой множества A. Множество $C(A)$ определяется как $\bigcap\{C_e(A) : e>0\}$. Эквивалентно этому такое определение. Положим $V_0(A)=A$, $V_1(A)=\{x : \operatorname{dist}(x, A)<e\}$ и по индукции $V_{n+1}(A)=V_1(V_n(A))$. Тогда $C_e(A)=\bigcup\{V_n(A) : n\in\omega\}$.

(а) Множество $C_e(A)$ для каждого A и $e>0$ открыто и замкнуто.

(б) Если A — связное подмножество пространства X, то и множество $C(A)$ связно. Отсюда следует, что $C(\{x\})$ для каждой точки x совпадает с ее компонентой C_x в пространстве X. (Пусть $C(A)$ является объединением замкнутых непересекающихся множеств B и D; взяв $f=[\operatorname{dist}(B, D)]/3$ и воспользовавшись утверждением 5.Ж, покажите, что $C_e(A)\subset\{x : \operatorname{dist}(x, B\cup D)<f\}$ для некоторого положительного e.)

(в) Для любого подмножества A пространства X имеем $C(A)=\bigcup\{C_x : x\in\overline{A}\}$. (Если $x\notin C(A)$, то $x\notin C_e(A)$ при некотором положительном e.)

(г) Разбиение пространства X на компоненты непрерывно (П. С. Александров [3]).

(д) *) Пусть X — связное пространство и U — его открытое подмножество. Тогда замыкание произвольной компоненты множества U пересекает множество $X\setminus U$. (Пусть это не так для некоторой компоненты P множества U, и пусть $x\in P$. Тогда P замкнуто в X и лежит целиком в U; поэтому найдется бикомпактная окрестность V множества P в X, содержащаяся в U. Компонента точки x в пространстве V содержится в P и потому лежит во внутренности V^0 множества V. Так как $V\setminus V^0$ бикомпактно, то некоторая e-компонента точки x в V не пересекается с $V\setminus V^0$ и потому ее пересечение с множеством V^0 является (непустым) открыто-замкнутым в X множеством.)

(е) *) Никакое замкнутое связное неодноточечное подмножество пространства X не является объединением счетного семейства попарно непересекающихся замкнутых подмножеств. (Основную роль в доказательстве этого факта играет утверждение (д). Пусть множество $\bigcup\{A_n : n\in\omega\}$ замкнуто и связно и все множества A_n замкнуты и попарно не пересекаются; возьмем в качестве U дополнение к некоторой замкнутой окрестности множества A_1, не пересекающейся с A_2. Тогда замыкание в X компоненты точки $x\in A_2$ в U является замкнутым связным множеством, не пересекающимся с A_1 и содержащим точки как из множества A_2, так и из множества $X\setminus A_2$.)

(ж) Пусть X — подмножество $\{(x, y) : x^2y^2=1\}$ евклидовой плоскости, наделенное обычной метрикой. Пространство X локально бикомпактно, и любые две его точки можно соединить e-цепью при любом $e>0$; однако X не связно.

Замечания. Результаты этого раздела очень естественно распространяются на любые бикомпакты (бикомпактные хаусдорфовы пространства). Теорема 5.27 об однообразии покрытий дает необходимое средство для этого.

---

*) Здесь оригинальное изложение несколько туманно. Оно развернуто мной. (*Прим. перев.*)

Чтобы читатель не предавался излишнему оптимизму относительно свойств связных множеств, мы отсылаем его к классическому примеру Кнастера и Куратовского [1]. Существует связное подпространство X евклидовой плоскости и в нем точка x такие, что в $X \setminus \{x\}$ нет нетривиальных связных подмножеств.

X. Звездно нормальные пространства

Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторое семейство подмножеств множества X и x — точка из X. Звездой точки x относительно $\mathfrak{U}$ называется объединение всех элементов семейства $\mathfrak{U}$, содержащих точку x. Покрытие $\mathfrak{B}$ называется *звездным измельчением* покрытия $\mathfrak{U}$*) тогда и только тогда, когда семейство звезд всевозможных точек множества X относительно $\mathfrak{B}$ вписано в $\mathfrak{U}$. Топологическое пространство *звездно нормально* в том и лишь в том случае, когда каждое его открытое покрытие допускает открытое звездное измельчение. Замечательная теорема А. Стоуна [1] гласит, что регулярное топологическое пространство звездно нормально тогда и только тогда, когда оно паракомпактно. (Если X паракомпактно, то свойство однообразности покрытия вместе с утверждением 5.30 позволяет легко доказать звездную нормальность. С другой стороны, если пространство X звездно нормально, $\mathfrak{U}$ — любое его открытое покрытие и $\mathfrak{B}$ — открытое покрытие, звездно вписанное в $\mathfrak{U}$, то $\bigcup\{V \times V : V \in \mathfrak{B}\}$ — искомая окрестность диагонали.)

Замечание. Определение звездной нормальности принадлежит Тьюки [1], установившему много полезных свойств звездно нормальных пространств.

Ц. Точечно конечные покрытия и слабо паракомпактные пространства

Семейство подмножеств множества X называется *точечно конечным* тогда и только тогда, когда в X не существует точки, принадлежащей бесконечному множеству элементов этого семейства. Топологическое пространство *слабо паракомпактно* в том и лишь в том случае, когда в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое точечно конечное покрытие.

(а) Пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное точечно конечное открытое покрытие нормального пространства X. Тогда для каждого $U \in \mathfrak{U}$ можно выбрать открытое множество $G(U)$ так, что $\overline{G(U)} \subset U$ и семейство всех $G(U)$ покрывает X. (Возьмите максимальный элемент в классе всех функций F, удовлетворяющих следующим условиям: областью определения F служит некоторое подсемейство семейства $\mathfrak{U}$, $F(U)$ для любого U из области определения F — открытое множество, лежащее в U вместе с замыканием, и $\bigcup\{F(U) : U \in$ *области определения функции* $F\} \cup \bigcup\{V : V \in \mathfrak{U}$ *и* $V \notin$ *области определения* $F\} = X$. Точечная конечность семейства $\mathfrak{U}$ гарантирует существование максимального F.)

---

*) У нас пишут в этом случае также, что $\mathfrak{B}$ *звездно вписано* в $\mathfrak{U}$. (*Прим. перев.*)

(б) В каждом точечно конечном покрытии множества содержится минимальное подпокрытие (т. е. такое подпокрытие, никакое собственное подсемейство которого не является покрытием).

(в) Для слабо паракомпактных T_1-пространств счетная компактность (см. 5. Д) эквивалентна бикомпактности.

Замечание. Предложения (б) и (в) взяты непосредственно из работы Аренса и Дугунджи [1].

Ч. Разбиение единицы

Разбиением единицы на топологическом пространстве X называется семейство F непрерывных отображений пространства X в множество неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющее двум условиям: 1) $\sum \{f(x) : f \in F\} = 1$ для каждой точки $x \in X$; 2) все функции из семейства F, за исключением конечного числа, обращаются в нуль вне некоторой окрестности каждой точки пространства X. Говорят, что разбиение F единицы *подчинено* покрытию $\mathfrak{U}$ пространства X, тогда и только тогда, когда каждая функция из семейства F равна нулю вне некоторого элемента покрытия $\mathfrak{U}$. Имеет место следующее утверждение: для каждого локально конечного открытого покрытия $\mathfrak{U}$ нормального пространства существует разбиение единицы, подчиненное $\mathfrak{U}$. Можно доказать несколько более сильный результат: пусть $\mathfrak{U}$ — локально конечное открытое покрытие нормального пространства; тогда для каждого U из $\mathfrak{U}$ можно построить неотрицательную непрерывную функцию f_U, равную нулю вне U и везде меньшую или равную единицы, так, чтобы было $\sum \{f_U(x) : U \in \mathfrak{U}\} = 1$ для всех x. (См. 5. Ц, (а).)

Замечание. Насколько мне известно, в близких формулировках этот результат был независимо доказан Гуревичем, Бохнером и Дьедонне.

Ш. Теорема о промежуточной функции для полунепрерывных функций

Пусть g и h — вещественные функции на паракомпактном пространстве X, полунепрерывные соответственно снизу и сверху, и пусть $h(x) < g(x)$ для всех x из X. Тогда существует такая непрерывная вещественная функция p на X, что $h(x) < p(x) < g(x)$ при каждом x. (Рассмотрим семейство $\mathfrak{U}$ открытых подмножеств U пространства X, на которых наименьшая верхняя грань функции h меньше, чем наибольшая нижняя грань функции g. Пусть F — какое-нибудь разбиение единицы, подчиненное $\mathfrak{U}$. Для каждого f из F выберем k_f так, чтобы из $f(x) \neq 0$ следовало, что $h(x) < k_f < g(x)$, и положим $p(x) = \sum \{k_f f(x) : f \in F\}$. Значение функции p в точке x — среднее значение чисел, заключенных между $h(x)$ и $g(x)$.)

Замечание. Полученный выше результат можно улучшить. Следует начать с отыскания счетного покрытия, вписанного в семейство $\mathfrak{U}$. Ясно, что заключение остается справедливым и для всех счетно паракомпактных пространств (т. е. таких пространств, в любое счетное открытое покрытие которых можно вписать локально конечное покрытие). Верно обратное к усиленному таким образом утверждению. Даукер [2] доказал эквивалентность следующих условий: 1) пространство X счетно паракомпактно и нормально; 2) произведение X и замкнутого единичного интервала нормально; 3) утверждение, сформулированное выше. Даукер показал также, что каждое совершенно нормальное пространство (т. е. нормальное пространство, в котором каждое замкнутое множество есть G_δ) счетно паракомпактно. Неизвестно, каждое ли нормальное хаусдорфово пространство счетно паракомпактно *).

Щ. Паракомпактные пространства

(а) Каждое регулярное линделёфово пространство паракомпактно.

(б) Топологическое пространство называется *σ-бикомпактным* тогда и только тогда, когда оно является объединением счетного семейства бикомпактных подмножеств. Каждое σ-бикомпактное пространство линделёфово.

(в) Если регулярное пространство является объединением дискретного семейства своих открытых линделёфовых подпространств, то оно паракомпактно. Следовательно, каждая локально бикомпактная группа паракомпактна. (Рассмотрите семейство классов смежности по наименьшей подгруппе, содержащей какую-либо фиксированную бикомпактную окрестность единицы.)

(г) Пространство полуоткрытых интервалов (стрелка, см. 1. Л и 4. И) регулярно и линделёфово; следовательно, оно паракомпактно. Декартово произведение этого пространства на себя не нормально и, следовательно, не паракомпактно (и не линделёфово).

(д) Множество порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа, не паракомпактно в порядковой топологии. (Рассмотрите покрытие, состоящее из всех множеств вида $\{x : x<a\}$. Верхняя грань каждого элемента произвольного покрытия, вписанного в это покрытие, меньше Ω.)

Замечания. Утверждение (а) принадлежит Морита [1]. Дальнейшие результаты, касающиеся паракомпактности (F_σ-теорема, произведения и т. п.), содержатся в работе Майкла [2] **). Бинг [1] изучил условие типа нормальности ***), промежуточное по отношению к нормальности и паракомпактности. В связи с этим отметим, что достойное внимания свойство типа нормальности, присущее паракомпактным пространствам, устанавливается в лемме 5.31.

*) Эта задача Даукера оказалась очень трудной: несмотря на ряд усилий, она не решена до сих пор. (*Прим. перев.*)

**) См. также работы Пономарева [6], Майкла [3], [4], Архангельского [2], [5]. (*Прим. перев.*)

***) Речь идет о *коллективной нормальности*. (*Прим. перев.*)