Глава 6

РАВНОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Есть несколько свойств метрических пространств, не являющихся топологическими, но тесно связанных с таковыми. Мы дадим сейчас примеры такого рода связей, отложив определения и доказательства. Свойство быть последовательностью Коши не является топологическим инвариантом: например, отображение $f(x)=\frac{1}{x}$, представляющее собой гомеоморфизм пространства положительных вещественных чисел на себя, переводит последовательность Коши $\left\{\frac{1}{n+1} : n\in\omega\right\}$ в последовательность $\{n+1\colon n\in\omega\}$, не удовлетворяющую условию Коши. Однако, отправляясь от утверждений о последовательностях Коши, можно получать топологические результаты. Например, подмножество A пространства всех вещественных чисел замкнуто в том и только в том случае, когда каждая последовательность Коши в A сходится к некоторой точке из A. Верны в некотором смысле обратные утверждения. Так, каждая непрерывная на бикомпактном метрическом пространстве функция равномерно непрерывна. Здесь из топологической предпосылки (пространство бикомпактно) мы выводим нетопологическое заключение (что функция равномерно непрерывна). Данная глава посвящена изучению квазитопологических вопросов описанного типа.

При изучении равномерных свойств применяется специальная математическая конструкция — равномерное пространство. Краткое обсуждение поможет понять, как работает это понятие, принадлежащее А. Вейлю [1].

Последовательность $\{x_n,\ n\in\omega\}$ точек в псевдометрическом пространстве (X, d) называется последовательностью Коши тогда и только тогда, когда $d(x_m, x_n)$ стремится к нулю с ростом m и n. В случае произвольного топологического пространства это понятие не имеет смысла: чтобы говорить о последовательностях Коши, надо знать, для каких пар расстояние $d(x, y)$ мало. Точно сформулировать условие Коши можно так: положим $V_{d, r}=\{(x, y) : d(x, y)<r\}$; тогда $\{x_n, n\in\omega\}$ является последовательностью Коши в том и только в том случае, когда (x_m, x_n) принадлежит $V_{d, r}$ при достаточно больших m и n для каждого положительного r. Определение равномерной непрерывности тоже можно дать в терминах семейства всех множеств вида $V_{d, r}$. Мы приходим, таким образом, к рассмотрению множества X и специального семейства подмножеств произведения $X\times X$.

Если X — топологическая группа, то последовательность $\{x_n, n\in\omega\}$ можно назвать последовательностью Коши тогда и только тогда, когда элемент $x_m x_n^{-1}$ лежит вблизи единицы e рассматриваемой группы при достаточно больших m и n. Чтобы это описание стало определением, опять-таки нужна информация о парах точек. Мы должны знать, для каких пар (x, y) элемент xy^{-1} лежит вблизи единицы e. Для каждой окрестности U элемента e положим $V_U=\{(x, y) : xy^{-1}\in U\}$. Ясно тогда, что семейство всех множеств вида V_U позволяет определить последовательности Коши.

Равномерное пространство определяется как множество X вместе с некоторым семейством подмножеств произведения $X\times X$, удовлетворяющим определенным естественным условиям. Последние получаются при абстрагировании от обоих рассмотренных выше примеров. Следует, однако, подчеркнуть, что предлагаемая аксиоматизация равномерных пространств отнюдь не единственно возможная. Можно было бы изучать множество X вместе с некоторым семейством псевдометрик на нем, на которое наложен ряд ограничений; можно также было бы выделить семейство покрытий множества X, называемых равномерными (грубо говоря, равномерных в смысле леммы Лебега о покрытии 5.26). Можно рассматривать также «метрики» со значениями в структурах более общих, чем структура вещественных чисел.

Возникающие при этом конструкции, по существу, эквивалентны, как указано в задачах в конце этой главы.

Наконец, следует сказать, что существуют свойства типа равномерности метрических пространств, по-видимому, не распространяющиеся на менее ограничительные ситуации. Последний параграф посвящен изучению некоторых таких свойств.

РАВНОМЕРНОСТЬ И РАВНОМЕРНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Нам предстоит рассматривать подмножества декартова произведения $X \times X$ некоторого множества X на себя. Эти подмножества являются отношениями в смысле главы 0, поэтому для удобства мы напомним некоторые из относящихся сюда определений и результатов, уже встречавшихся нам ранее. Отношение — это множество, элементами которого являются упорядоченные пары. Если U — отношение, то обратное к нему отношение U^{-1} определяется как множество всех пар (x, y) таких, что $(y, x) \in U$. Операция перехода к обратному инволютивна в том смысле, что $(U^{-1})^{-1}$ всегда есть U. Если $U = U^{-1}$, то U называется симметричным отношением. Композиция $U \circ V$ отношений U и V определяется как множество всех пар (x, z), для которых при некотором y $(x, y) \in V$ и $(y, z) \in U$. Операция композиции ассоциативна, т. е. $U \circ (V \circ W) = (U \circ V) \circ W$; всегда $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$. Множество всех пар (x, x), где $x \in X$, называется тождественным отношением, или диагональю, и обозначается через $\Delta(X)$ или Δ. Для произвольного подмножества A из X множество $U[A]$ определяется как $\{y : (x, y) \in U$ *для некоторого* x *из* $A\}$; при этом, если x — точка множества X, то полагаем $U[x] = U[\{x\}]$. Для любых U, V и A выполняется равенство $U \circ V[A] = U[V[A]]$. Наконец, нам понадобится простая лемма.

1. Лемма. *Если отношение* V *симметрично,* то $V \circ U \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}$.

Доказательство. Имеем: $V \circ U \circ V$ — множество всех пар (u, v) таких, что $(u, x) \in V$, $(x, y) \in U$ и $(y, v) \in V$ для некоторых x и y. Так как V симметрично, то это — в точности множество тех (u, v), для которых $u \in V[x]$ и $v \in V[y]$ при некотором (x, y) из U. Но $u \in V[x]$ и

$v \in V[y]$ тогда и только тогда, когда $(u, v) \in V[x] \times V[y]$; следовательно, $V \circ U \circ V = \{(u, v) : (u, v) \in V[x] \times V[y]$ *для некоторого* (x, y) *из* $U\} = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in U\}$.

Равномерность на множестве X — это непустое семейство $\mathfrak{U}$ подмножеств множества $X \times X$, удовлетворяющее условиям:

(а) каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ содержит диагональ Δ;

(б) если $U \in \mathfrak{U}$, то $U^{-1} \in \mathfrak{U}$;

(в) если $U \in \mathfrak{U}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого V из $\mathfrak{U}$;

(г) если U и V входят в $\mathfrak{U}$, то и $U \cap V \in \mathfrak{U}$;

(д) если $U \in \mathfrak{U}$ и $U \subset V \subset X \times X$, то $V \in \mathfrak{U}$.

Пара $(X, \mathfrak{U})$ называется *равномерным пространством*.

Нетрудно угадать метрические прототипы выписанных выше условий. Первое возникло из требования $d(x, x) = 0$, второе обобщает условие симметрии $d(x, y) = d(y, x)$. Третье — разновидность условия треугольника; грубо говоря, оно отражает требование, чтобы для каждого r-шара нашелся шар вдвое меньшего радиуса. Четвертое и пятое условия сходны с аксиомами системы окрестностей точки; они помогут нам установить соответствующие свойства системы окрестностей в топологии, которую мы сейчас определим.

На множестве X могут существовать разные равномерности. Наибольшую из них образует семейство всех подмножеств множества $X \times X$, содержащих диагональ; наименьшую равномерность на X образует семейство, единственным элементом которого является $X \times X$. На множестве X вещественных чисел *обычная равномерность* определяется как семейство $\mathfrak{U}$ всех таких подмножеств U произведения $X \times X$, что $\{(x, y) : |x - y| < r\} \subset U$ для некоторого положительного числа r. Каждый элемент этого семейства $\mathfrak{U}$ является окрестностью диагонали Δ (прямой, уравнение которой $y = x$); но следует подчеркнуть, что не каждая окрестность диагонали принадлежит семейству $\mathfrak{U}$. Например, множество $\left\{(x, y) : |x - y| < \frac{1}{1 + |y|}\right\}$ является окрестностью диагонали Δ, но оно не входит в $\mathfrak{U}$.

Вообще говоря, объединение и пересечение двух равномерностей на X может не быть равномерностью. Однако объединение произвольного семейства равномерностей весьма естественным образом порождает некоторую равномерность. Подсемейство $\mathfrak{B}$ равномерности $\mathfrak{U}$ называется ее *базой* тогда и только тогда, когда каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ — база равномерности $\mathfrak{U}$, то последняя полностью определяется семейством $\mathfrak{B}$: подмножество U произведения $X \times X$ входит в $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда U содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{B}$. Подсемейство $\mathfrak{S}$ называется *предбазой* равномерности $\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда конечные пересечения элементов $\mathfrak{S}$ образуют базу $\mathfrak{U}$. Эти определения вполне аналогичны определениям базы и предбазы топологии.

2. Теорема. *Семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств произведения $X \times X$ является базой некоторой равномерности на X в том и только в том случае, когда одновременно выполняются условия:*

(а) *каждый элемент семейства $\mathfrak{B}$ содержит диагональ Δ;*

(б) *если $U \in \mathfrak{B}$, то U^{-1} содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{B}$;*

(в) *если $U \in \mathfrak{B}$, то $V \circ V \subset U$ для некоторого V из $\mathfrak{B}$;*

(г) *пересечение любых двух элементов семейства $\mathfrak{B}$ содержит некоторый элемент этого семейства.*

Доказательство этого утверждения ввиду тривиальности опускается.

Семейства, являющиеся предбазами равномерностей, охарактеризовать труднее. Для наших целей достаточен следующий простой результат.

3. Теорема. *Для того чтобы семейство $\mathfrak{S}$ подмножеств множества $X \times X$ было предбазой некоторой равномерности на X, достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие условия:*

(а) *каждый элемент семейства $\mathfrak{S}$ содержит диагональ Δ;*

(б) *для каждого $U \in \mathfrak{S}$ множество U^{-1} содержит некоторый элемент семейства $\mathfrak{S}$;*

(в) *для каждого* $U \in \mathfrak{S}$ *существует* $V \in \mathfrak{S}$ *такое, что* $V \circ V \subset U$.

В частности, объединение любого семейства равномерностей на X *является предбазой некоторой равномерности на* X.

Доказательство. Нужно показать, что семейство $\mathfrak{B}$ всевозможных конечных пересечений элементов семейства $\mathfrak{S}$ удовлетворяет условиям утверждения 6.2. Это легко вытекает из следующего замечания: если $U_1, \ldots, U_n$ и $V_1, \ldots, V_n$ — подмножества множества $X \times X$, $U = \bigcap \{U_i\colon i = 1, \ldots, n\}$ и $V = \bigcap \{V_i, i = 1, \ldots, n\}$, то $V \subset U^{-1}$ (соответственно, $V \circ V \subset U$), коль скоро $V_i \subset U_i^{-1}$ (соответственно, $V_i \circ V_i \subset U_i$) при каждом i.

Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство; *топологией* $\mathfrak{I}$, *соответствующей равномерности* $\mathfrak{U}$, или *равномерной топологией*, называется семейство всех таких подмножеств T пространства X, что, какова бы ни была точка $x \in T$, существует $U \in \mathfrak{U}$, для которого $U[x] \subset T$. (Это точное обобщение определения топологии, порожденной метрикой: метрическая топология состоит из всех множеств, содержащих каждую свою точку вместе с некоторым шаром вокруг нее.) Следует проверить, что $\mathfrak{I}$ действительно является топологией. Это не представляет никакого труда: в силу определения объединение элементов $\mathfrak{I}$ непременно является элементом $\mathfrak{I}$. Если T и S входят в $\mathfrak{I}$ и $x \in T \cap S$, то существуют U и V в $\mathfrak{U}$ такие, что $U[x] \subset T$ и $V[x] \subset S$; тогда $(U \cap V)[x] \subset T \cap S$. Следовательно, $T \cap S \in \mathfrak{I}$, и $\mathfrak{I}$ является топологией.

Чтобы изучить взаимоотношения между равномерностью и соответствующей ей равномерной топологией, рассмотрим несколько теорем.

4. Теорема. *Внутренность подмножества* A *пространства* X, *наделенного равномерной топологией, состоит из всех точек* x *таких, что* $U[x] \subset A$ *для некоторого* U *из* $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что множество $B = \{x : U[x] \subset A$ *для некоторого* U *из* $\mathfrak{U}\}$ открыто в равномерной топологии, ибо B, очевидно, содержит каждое открытое подмножество множества A. Пусть $x \in B$; тогда существует $U \in \mathfrak{U}$, для которого $U[x] \subset A$. В $\mathfrak{U}$ есть элемент V такой, что $V \circ V \subset U$. Если $y \in V[x]$, то $V[y] \subset V \circ V[x] \subset U[x] \subset A$, откуда следует, что $y \in B$. Значит, $V[x] \subset B$, т. е. B — открытое множество.

Из теоремы 4 немедленно следует, что $U[x]$ — окрестность точки x для любого элемента U равномерности $\mathfrak{U}$. Следовательно, семейство всех множеств вида $U[x]$, где $U \in \mathfrak{U}$, является базой топологии в точке x. (Это семейство на самом деле совпадает с системой всех окрестностей точки x, но последнее не очень важно.) Теперь ясно следующее утверждение.

5. Теорема. *Если $\mathfrak{B}$ — база (или предбаза) некоторой равномерности $\mathfrak{U}$, то для каждой точки x семейство всех множеств $U[x]$, где $U \in \mathfrak{B}$, образует базу (соответственно предбазу) топологии в точке x.*

Равномерной топологии на множестве X соответствует топология произведения на $X \times X$. Как естественно было ожидать, элементы равномерности имеют специальное строение относительно этой топологии.

6. Теорема. *Если U — элемент равномерности $\mathfrak{U}$, то внутренность множества U тоже принадлежит $\mathfrak{U}$. Следовательно, семейство всех открытых симметричных элементов равномерности $\mathfrak{U}$ является ее базой.*

Доказательство. Внутренность подмножества M произведения $X \times X$ состоит из всех таких (x, y), что для некоторых U и V из $\mathfrak{U}$ будет $U[x] \times V[y] \subset M$. Так как $U \cap V \in \mathfrak{U}$, то внутренностью M является множество $\{(x, y) : V[x] \times V[y] \subset M$ *для некоторого* V *из* $\mathfrak{U}\}$. Для любого $U \in \mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}$ существует симметричный элемент V такой, что $V \circ V \circ V \subset U$. В соответствии с леммой 6.1 $V \circ V \circ V = \bigcup \{V[x] \times V[y] : (x, y) \in V\}$. Значит, каждая точка множества V является внутренней точкой множества U; а раз V принадлежит внутренности множества U, то последняя сама входит в $\mathfrak{U}$.

В силу предшествующей теоремы каждый элемент равномерности является окрестностью диагонали. Следует подчеркнуть, что обратное к этому утверждению неверно. На X может существовать много разных равномерностей, порождающих одну и ту же топологию, — семейства окрестностей диагонали в этом случае совпадают.

7. Теорема. *Замыкание произвольного подмножества A пространства X в равномерной топологии есть*

$\bigcap\{U[A] : U \in \mathfrak{U}\}$. *Замыкание подмножества* M *произведения* $X \times X$ *есть* $\bigcap\{U \circ M \circ U : U \in \mathfrak{U}\}$.

Доказательство. Точка x принадлежит замыканию подмножества A пространства X тогда и только тогда, когда $U[x]$ пересекает A при каждом U из $\mathfrak{U}$. Но $U[x]$ пересекает A в том и лишь в том случае, когда $x \in U^{-1}[A]$; так как каждый элемент семейства $\mathfrak{U}$ содержит некоторый симметричный элемент этого семейства, то $x \in \bar{A}$ в том и лишь в том случае, когда $x \in U[A]$ при каждом U из $\mathfrak{U}$. Первое утверждение этим доказано. Аналогично, если U — симметричный элемент семейства $\mathfrak{U}$, то $U[x] \times U[y]$ пересекает подмножество M произведения $X \times X$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in U[u] \times U[v]$ для некоторого (u, v) из M, т. е. когда $(x, y) \in \bigcup\{U[u] \times U[v] : (u, v) \in M\}$. Так как в силу леммы 6.1 последнее множество совпадает с $U \circ M \circ U$, то отсюда следует, что условие $(x, y) \in \bar{M}$ равносильно условию $(x, y) \in \bigcap\{U \circ M \circ U : U \in \mathfrak{U}\}$.

8. Теорема. *Семейство всех замкнутых симметричных элементов равномерности* $\mathfrak{U}$ *является ее базой.*

Доказательство. Если $U \in \mathfrak{U}$ и V — такой элемент семейства $\mathfrak{U}$, что $V \circ V \circ V \subset U$, то $V \circ V \circ V$ содержит замыкание множества V в силу предыдущей теоремы. Значит, U содержит замкнутый элемент W равномерности $\mathfrak{U}$; тогда $W \cap W^{-1}$ — искомый замкнутый симметричный элемент.

Вскоре мы покажем, что каждое равномерное пространство (точнее, каждое пространство с равномерной топологией) вполне регулярно. Пока же ясно, что каждое такое пространство регулярно, ибо произвольная окрестность точки x содержит некоторую окрестность вида $V[x]$, где V — замкнутый элемент семейства $\mathfrak{U}$; в этом случае множество $V[x]$ замкнуто. Следовательно, пространство с равномерной топологией хаусдорфово тогда и только тогда, когда каждое его одноточечное подмножество замкнуто. Так как замыкание множества $\{x\}$ есть $\bigcap\{U[x] : U \in \mathfrak{U}\}$, то пространство с равномерной топологией хаусдорфово тогда и только тогда, когда множество $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{U}\}$ совпадает с диагональю Δ. Если последнее условие выполнено, то $(X, \mathfrak{U})$ называется *хаусдорфовым*, или *отделимым*, равномерным пространством.

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ; ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНОМЕРНОСТЕЙ

Пусть f — отображение равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Говорят, что f *равномерно непрерывно относительно* $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$, тогда и только тогда, когда для каждого V из $\mathfrak{V}$ множество $\{(x, y) : (f(x), f(y)) \in V\}$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Это условие можно перефразировать несколькими способами. Пусть для произвольного отображения f множества X в Y f_2 обозначает индуцированное им отображение произведения $X \times X$ в $Y \times Y$, определенное равенством $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$. Отображение f равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого V из $\mathfrak{V}$ существует U из $\mathfrak{U}$ такое, что $f_2[U] \subset V$. Еще одно утверждение: пусть $\mathfrak{S}$ — предбаза равномерности $\mathfrak{V}$; тогда f равномерно непрерывно в том и лишь в том случае, когда $f_2^{-1}[V] \in \mathfrak{U}$ для каждого V из $\mathfrak{S}$, ибо f_2^{-1} сохраняет объединения и пересечения. Если Y — множество вещественных чисел с обычной равномерностью $\mathfrak{V}$, то из наших определений следует, что отображение f равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа r существует $U \in \mathfrak{U}$ такое, что $|f(x) - f(y)| < r$ при $(x, y) \in U$. Если и X — пространство вещественных чисел с обычной равномерностью, то f равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого положительного числа r найдется положительное число s такое, что $|f(x) - f(y)| < r$ при $|x - y| < s$.

Очевидно, что если f — отображение множества X в множество Y и g — функция на множестве Y, то $(g \circ f)_2 = g_2 \circ f_2$, а отсюда следует, что композиция двух равномерно непрерывных отображений снова является равномерно непрерывным отображением. Если f — взаимно однозначное отображение X на Y и оба отображения f и f^{-1} равномерно непрерывны, то говорят, что f — *равномерный*