хаусдорфовым, или *отделимым*, равномерным пространством.

РАВНОМЕРНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ; ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНОМЕРНОСТЕЙ

Пусть f — отображение равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Говорят, что f *равномерно непрерывно относительно* $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$, тогда и только тогда, когда для каждого V из $\mathfrak{V}$ множество $\{(x, y) : (f(x), f(y)) \in V\}$ принадлежит $\mathfrak{U}$. Это условие можно перефразировать несколькими способами. Пусть для произвольного отображения f множества X в Y f_2 обозначает индуцированное им отображение произведения $X \times X$ в $Y \times Y$, определенное равенством $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$. Отображение f равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого V из $\mathfrak{V}$ существует U из $\mathfrak{U}$ такое, что $f_2[U] \subset V$. Еще одно утверждение: пусть $\mathfrak{S}$ — предбаза равномерности $\mathfrak{V}$; тогда f равномерно непрерывно в том и лишь в том случае, когда $f_2^{-1}[V] \in \mathfrak{U}$ для каждого V из $\mathfrak{S}$, ибо f_2^{-1} сохраняет объединения и пересечения. Если Y — множество вещественных чисел с обычной равномерностью $\mathfrak{V}$, то из наших определений следует, что отображение f равномерно непрерывно тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа r существует $U \in \mathfrak{U}$ такое, что $|f(x) - f(y)| < r$ при $(x, y) \in U$. Если и X — пространство вещественных чисел с обычной равномерностью, то f равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого положительного числа r найдется положительное число s такое, что $|f(x) - f(y)| < r$ при $|x - y| < s$.

Очевидно, что если f — отображение множества X в множество Y и g — функция на множестве Y, то $(g \circ f)_2 = g_2 \circ f_2$, а отсюда следует, что композиция двух равномерно непрерывных отображений снова является равномерно непрерывным отображением. Если f — взаимно однозначное отображение X на Y и оба отображения f и f^{-1} равномерно непрерывны, то говорят, что f — *равномерный* *изоморфизм* *), а пространства X и Y называются при этом *равномерно эквивалентными*. Композиция двух равномерных изоморфизмов, обратное отображение к равномерному изоморфизму и тождественное отображение пространства на себя — все являются равномерными изоморфизмами. Следовательно, семейство всех равномерных пространств распадается на классы, состоящие из равномерно эквивалентных пространств. Если свойство таково, что, будучи присуще одному равномерному пространству, оно непременно принадлежит и любому пространству, равномерно изоморфному последнему, то это свойство называют *равномерным инвариантом*. За небольшими исключениями, все свойства, изучаемые в этой главе, являются равномерными инвариантами.

Как и следовало ожидать, из равномерной непрерывности отображения вытекает, что оно непрерывно относительно равномерной топологии.

9. Теорема. *Каждое равномерно непрерывное отображение непрерывно относительно равномерной топологии; следовательно, каждый равномерный изоморфизм является гомеоморфизмом.*

Доказательство. Пусть f — равномерно непрерывное отображение пространства $(X, \mathfrak{U})$ в $(Y, \mathfrak{V})$ и U — какая-нибудь окрестность точки $f(x)$. Тогда существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $V[f(x)] \subset U$; имеем $f^{-1}[V[f(x)]] = \{y : f(y) \in V[f(x)]\} = \{y : (f(x), f(y)) \in V\} = f_2^{-1}[V](x)$ **), а это — окрестность точки x. Следовательно, $f^{-1}[U]$ является окрестностью точки x, чем непрерывность отображения f доказана.

Вообще говоря, не для любого отображения f множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ семейство всех множеств вида $f_2^{-1}[V]$, где $V \in \mathfrak{V}$, является равномерностью на X. Дело в том, что в пространстве $X \times X$ может существовать подмножество, которое содержит

*) Или равномерный гомеоморфизм. (*Прим. перев.*)

**) Множество $f_2^{-1}[V](x)$ лежит в X и по определению состоит из тех точек $y \in X$, для которых $(x, y) \in f_2^{-1}[V]$. (*Прим. перев.*)

некоторое множество $f_2^{-1}[V]$, не являясь прообразом никакого подмножества пространства $Y \times Y$. Однако это затруднение несущественно: как мы сейчас проверим, семейство всех $f_2^{-1}[V]$ образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на X. Ясно, что f_2^{-1} сохраняет включения, переход к обратному элементу $\left(\text{т. е. } f_2^{-1}[V^{-1}] = \left[f_2^{-1}[V]\right]^{-1}\right)$ и пересечения. Следовательно, надо показать только, что для каждого элемента U равномерности $\mathfrak{V}$ найдется такой элемент $V \in \mathfrak{V}$, что $f_2^{-1}[V] \circ f_2^{-1}[V] \subset f_2^{-1}[U]$. Но если $V \circ V \subset U$, а (x, y) и (y, z) входят в $f_2^{-1}[V]$, то $(f(x), f(y))$ и $(f(y), f(z))$ принадлежат множеству V и, значит, $(f(x), f(z)) \in V \circ V$. Следовательно, семейство всех прообразов элементов семейства $\mathfrak{V}$ действительно образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на X. Ясно, что отображение f равномерно непрерывно относительно $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$. В действительности $\mathfrak{U}$ является наименьшей среди всех равномерностей, относительно которых f равномерно непрерывно.

Если $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство и Y — произвольное подмножество множества X, то в силу предшествующего рассуждения существует наименьшая равномерность $\mathfrak{V}$ на Y, относительно которой тождественное отображение Y в X равномерно непрерывно. Ясно, что $\mathfrak{V}$ состоит просто из пересечений элементов равномерности $\mathfrak{U}$ с множеством $Y \times Y$ (иногда говорят, что $\mathfrak{V}$ является следом семейства $\mathfrak{U}$ на множестве $Y \times Y$). Равномерность $\mathfrak{V}$ называется *относительной равномерностью* на множестве Y, соответствующей равномерности $\mathfrak{U}$; говорят также, что $\mathfrak{V}$ *индуцирована* равномерностью $\mathfrak{U}$. Пространство $(Y, \mathfrak{V})$ при этом называется равномерным подпространством пространства $(X, \mathfrak{U})$. Мы опускаем простую проверку того факта, что топология, соответствующая относительной равномерности $\mathfrak{V}$, индуцируется топологией, порожденной равномерностью $\mathfrak{U}$.

Мы видели, что всегда существует наименьшая равномерность, относительно которой заданное отображение множества в равномерное пространство становится равномерно непрерывным. Можно распространить это утверждение на случай семейства F отображений f множества X в равномерные пространства $(Y_f, \mathfrak{U}_f)$. Семейство всех множеств вида $f_2^{-1}[U] = \{(x, y) : (f(x), f(y)) \in \in U\}$, где $f \in F$ и $U \in \mathfrak{U}_f$, образует предбазу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на X, причем $\mathfrak{U}$ — наименьшая среди тех равномерностей на X, относительно которой все f равномерно непрерывны. (Теорема 6.3 показывает, что семейство всех множеств вида $f_2^{-1}[U]$ является предбазой некоторой равномерности $\mathfrak{U}$; при этом ясно, что каждое отображение f равномерно непрерывно относительно $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}$ — наименьшая из всех равномерностей на X, обладающих этим свойством.) В точности этот путь приводит нас к определению произведения равномерностей. Пусть $(X_a, \mathfrak{U}_a)$ — равномерное пространство для каждого a из некоторого множества индексов A; тогда *равномерность произведения на* $\Pi\{X_a : a \in A\}$ есть наименьшая из тех равномерностей, относительно которых все проектирования на координатные пространства равномерно непрерывны. Семейство всех множеств вида $\{(x, y) : (x_a, y_a) \in U\}$, где $a \in A$ и $U \in \mathfrak{U}_a$, является предбазой равномерности произведения. Пусть x — любая точка произведения. Предбазу топологии (порожденной равномерностью) в x можно построить, в частности, отправляясь от выбранной предбазы равномерности произведения. Значит, семейство всех множеств вида $\{y : (x_a, y_a) \in U\}$ является предбазой рассматриваемой равномерной топологии в точке x. Отсюда следует, что базу топологии произведения равномерностей в точке x образует семейство всевозможных конечных пересечений множеств вида $\{y : y_a \in U[x_a]\}$, где $a \in A$ и $U \in \mathfrak{U}_a$. Но то же самое семейство множеств служит также базой топологии произведения в точке x. Таким образом, топология произведения и топология, соответствующая равномерности произведения, совпадают. Это утверждение составляет первую половину следующей теоремы.

10. Т е о р е м а. *Топология произведения равномерностей совпадает с топологией произведения.*

Отображение f равномерного пространства в произведение равномерных пространств равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда композиция f

с каждым проектированием на координатное пространство равномерно непрерывна.

Доказательство. Если f — равномерно непрерывное отображение со значениями в произведении $\Pi\{X_a : a \in A\}$, то каждое проектирование P_a равномерно непрерывно, и композиция $P_a \circ f$ тоже равномерно непрерывна. Если отображение $P_a \circ f$ равномерно непрерывно при каждом a из A и U — какой-либо элемент равномерности, заданной на X_a, то $\{(u, v) : (P_a \circ f(v)) \in U\}$ — элемент равномерности $\mathfrak{V}$, заданной на области определения f. Но последнее множество можно записать в виде $f_2^{-1}\left[\{(x, y) : (x_a, y_a) \in U\}\right]$. Значит, прообраз произвольного элемента предбазы равномерности произведения при f_2 принадлежит $\mathfrak{V}$; следовательно, отображение f равномерно непрерывно.

Следующим предложением мы начинаем изучение соотношений между равномерностями и псевдометриками на X.

11. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство и d — некоторая псевдометрика на множестве X. Тогда функция d равномерно непрерывна на $X \times X$ относительно равномерности произведения в том и только в том случае, когда множество $\{(x, y) : d(x, y) < r\}$ входит в $\mathfrak{U}$ для каждого положительного числа r.*

Доказательство. Положим $V_{d,r} = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$. Мы должны показать, что $V_{d,r} \in \mathfrak{U}$ при каждом r тогда и только тогда, когда функция d непрерывна относительно равномерности произведения на $X \times X$. Для любого элемента U равномерности $\mathfrak{U}$ множества $\{((x, y), (u, v)) : (x, u) \in U\}$ и $\{((x, y), (u, v)) : (y, v) \in U\}$ принадлежат равномерности произведения; легко видеть, что семейство всех множеств вида $\{((x, y), (u, v)) : (x, u) \in U$ и $(y, v) \in U\}$ образует базу равномерности произведения. Следовательно, если функция d равномерно непрерывна, то для каждого положительного числа r существует такой элемент U в $\mathfrak{U}$, что если (x, u) и (y, v) принадлежат U, то $|d(x, y) - d(u, v)| < r$. В частности, полагая $(u, v) = (y, y)$, мы получаем, что если $(x, y) \in U$, то $d(x, y) < r$. Тогда $U \subset V_{d,r}$ и, следовательно, $V_{d,r} \in \mathfrak{U}$. Докажем обратное утверждение. Заметим, что если (x, u) и (y, v) входят в $V_{d,r}$, то $|d(x, y) - d(u, v)| < 2r$, ибо $d(x, y) \leqslant \leqslant d(x, u) + d(u, v) + d(y, v)$ и $d(u, v) \leqslant d(x, u) + d(x, y) + + d(y, v)$. Отсюда следует, что если $V_{d,r} \in \mathfrak{U}$ при каждом положительном r, то функция d равномерно непрерывна.

МЕТРИЗАЦИЯ

Целью этого параграфа является сравнение равномерных пространств с псевдометризуемыми. То, как протекает это сравнение, является примером стандартной процедуры для проверки эффективности нового обобщения. Объект, полученный в результате обобщения, сравнивается с обобщаемым математическим объектом с целью установить, в какой мере сохранены основные концепции. В рассматриваемом случае (как и во многих других) сравнение приводит к представлению общего объекта через посредство его предшественника. С каждым семейством псевдометрик на множестве X будет связана некоторая равномерность. Главный результат этого параграфа заключается в том, что каждую равномерность можно получить таким способом из семейства всех псевдометрик, равномерно непрерывных относительно нее. Будет показано также, что равномерность описывается одной псевдометрикой в том и только в том случае, когда эта равномерность обладает счетной базой.

Каждая псевдометрика d, заданная на произвольном множестве X, порождает на нем некоторую равномерность по следующему правилу. Для каждого положительного числа r положим $V_{d,r} = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$. Ясно, что $(V_{d,r})^{-1} = V_{d,r}$, $V_{d,r} \cap V_{d,s} = V_{d,t}$, где $t = \min[r, s]$, и $V_{d,r} \circ V_{d,r} \subset V_{d,2r}$. Отсюда следует, что семейство всех множеств вида $V_{d,r}$ образует базу некоторой равномерности на X. Эта равномерность называется *псевдометрической равномерностью*, или *равномерностью, порожденной псевдометрикой* d. Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *псевдометризуемым* (*метризуемым*) в том и только в том случае, когда существует псевдометрика (соответственно метрика) d, порождающая равномер-