утверждение. Заметим, что если (x, u) и (y, v) входят в $V_{d,r}$, то $|d(x, y) - d(u, v)| < 2r$, ибо $d(x, y) \leqslant \leqslant d(x, u) + d(u, v) + d(y, v)$ и $d(u, v) \leqslant d(x, u) + d(x, y) + + d(y, v)$. Отсюда следует, что если $V_{d,r} \in \mathfrak{U}$ при каждом положительном r, то функция d равномерно непрерывна.

МЕТРИЗАЦИЯ

Целью этого параграфа является сравнение равномерных пространств с псевдометризуемыми. То, как протекает это сравнение, является примером стандартной процедуры для проверки эффективности нового обобщения. Объект, полученный в результате обобщения, сравнивается с обобщаемым математическим объектом с целью установить, в какой мере сохранены основные концепции. В рассматриваемом случае (как и во многих других) сравнение приводит к представлению общего объекта через посредство его предшественника. С каждым семейством псевдометрик на множестве X будет связана некоторая равномерность. Главный результат этого параграфа заключается в том, что каждую равномерность можно получить таким способом из семейства всех псевдометрик, равномерно непрерывных относительно нее. Будет показано также, что равномерность описывается одной псевдометрикой в том и только в том случае, когда эта равномерность обладает счетной базой.

Каждая псевдометрика d, заданная на произвольном множестве X, порождает на нем некоторую равномерность по следующему правилу. Для каждого положительного числа r положим $V_{d,r} = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$. Ясно, что $(V_{d,r})^{-1} = V_{d,r}$, $V_{d,r} \cap V_{d,s} = V_{d,t}$, где $t = \min[r, s]$, и $V_{d,r} \circ V_{d,r} \subset V_{d,2r}$. Отсюда следует, что семейство всех множеств вида $V_{d,r}$ образует базу некоторой равномерности на X. Эта равномерность называется *псевдометрической равномерностью*, или *равномерностью, порожденной псевдометрикой* d. Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *псевдометризуемым* (*метризуемым*) в том и только в том случае, когда существует псевдометрика (соответственно метрика) d, порождающая равномерность $\mathfrak{U}$. Равномерность, порожденную псевдометрикой d, можно описать иначе. В соответствии с теоремой 6.11 псевдометрика d равномерно непрерывна относительно равномерности $\mathfrak{V}$ (точнее, относительно равномерности произведения) в том и только в том случае, когда $V_{d,r} \in \mathfrak{V}$ при каждом положительном r. Равномерность $\mathfrak{U}$, порожденная псевдометрикой d, характеризуется как наименьшая из тех равномерностей, относительно которых функция d равномерно непрерывна на $X \times X$. Стоит отметить, что псевдометрическая топология совпадает с равномерной топологией, соответствующей равномерности $\mathfrak{U}$. В самом деле, множество $V_{d,r}[x]$ является открытым r-шаром вокруг точки x, причем семейство всех множеств этого вида образует базу в x каждой из топологий, о которых идет речь.

Решающим шагом при построении метризационной теоремы для равномерных пространств является доказательство следующей леммы.

12. Метризационная лемма. *Пусть $\{U_n, n \in \omega\}$ — последовательность подмножеств произведения $X \times X$ такая, что $U_0 = X \times X$, каждое U_n содержит диагональ и $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$ при любом n. Тогда существует неотрицательная вещественная функция d на $X \times X$, удовлетворяющая условиям*:

(а) *$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ при всех x, y и z*;

(б) *$U_n \subset \{(x, y) : d(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1}$ при каждом положительном целом n.*

Если каждое U_n — симметричное множество, то существует псевдометрика d, для которой выполняется условие (б).

Доказательство. Определим вещественную функцию f на множестве $X \times X$ следующим образом: $f(x, y) = 2^{-n}$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in U_n \setminus U_{n-1}$, и $f(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда (x, y) принадлежит каждому U_n. Искомая функция d строится на основе функции f, являющейся ее «первым приближением», в результате рассмотрения конечных цепочек точек. Для каждой пары точек x, y множества X обозначим через $d(x, y)$ нижнюю грань значений суммы $\Sigma\{f(x_i, x_{i+1}) : i = 0, \ldots, l\}$ по всем конечным последовательностям $x_0, x_1, \ldots, x_{l+1}$, в которых $x = x_0$ и

$y=x_{l+1}$. Ясно, что d удовлетворяет неравенству треугольника, и из $d(x, y)\leqslant f(x, y)$ следует, что $U_n\subset\subset\{(x, y) : d(x, y)<2^{-n}\}$. Если каждое U_n — симметричное множество, то $f(x, y)=f(y, x)$ для любой пары (x, y). Значит, в этом случае d является псевдометрикой. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что $f(x_0, x_{l+1})\leqslant 2\Sigma\{f(x_i, x_{i+1}) : i=0, \ldots, l\}$, ибо отсюда следует, что если $d(x, y)<2^{-n}$, то $f(x, y)<2^{-n+1}$ и, значит, $(x, y)\in U$, т. е. $\{(x, y) : d(x, y)<2^{-n}\}\subset U_{n-1}$. Доказательство проведем индукцией по длине цепочки l. При $l=0$ неравенство ясно. Для удобства условимся называть величину $\Sigma\{f(x_i, x_{i+1}) : i=r, \ldots, s\}$ длиной цепочки от r до $s+1$, и пусть a — длина цепочки от 0 до $l+1$. Обозначим через k наибольшее целое число такое, что длина рассматриваемой цепочки от 0 до k не превосходит $\frac{a}{2}$. Заметим, что длина цепочки от $k+1$ до $l+1$ также не больше $\frac{a}{2}$. В силу предположения индукции каждое из чисел $f(x_0, x_k)$ и $f(x_{k+1}, x_{l+1})$ не превосходит $2\frac{a}{2}=a$; при этом, $f(x_k, x_{k+1})$ тоже не больше a. Если m — наименьшее целое число, для которого $2^{-m}\leqslant a$, то (x_0, x_k), (x_k, x_{k+1}) и (x_{k+1}, x_{l+1}) принадлежат U_m и, значит, $(x_0, x_{l+1})\in U_{m-1}$. Следовательно, $f(x_0, x_{l+1})\leqslant 2^{-m+1}\leqslant 2a$; лемма доказана.

Если равномерность $\mathfrak{U}$ на X обладает счетной базой $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$, то можно построить по индукции семейство симметричных множеств $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$, где для любого целого положительного n $U_n\circ U_n\circ U_n\subset\subset U_{n-1}$ и $U_n\subset V_n$. Семейство множеств U_n образует тогда базу равномерности $\mathfrak{U}$. Применяя метризационную лемму, мы заключаем, что равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ псевдометризуемо. Итак, доказана

13. Метризационная теорема. *Равномерное пространство псевдометризуемо в том и только в том случае, когда его равномерность обладает счетной базой.*

Из этой теоремы, очевидно, вытекает, что равномерное пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово и его равномерность обладает счетной базой.

14. Замечания. Насколько мне известно, эта теорема впервые появилась в статье П. С. Александрова и Урысона [1]. Ее авторы искали решение топологической задачи метризации (см. 4.18); полученный ими результат звучит (приблизительно) так: хаусдорфово топологическое пространство $(X, \mathfrak{I})$ метризуемо тогда и только тогда, когда существует равномерность со счетной базой, равномерная топология которой совпадает с $\mathfrak{I}$. Это — малоудовлетворительное *) решение топологической проблемы метризации. Однако если чуть усилить заключение, то получается в точности наша метризационная теорема для равномерных пространств. Читтенден [1] первым доказал теорему 6.13 в «равномерной» формулировке. Позднее его доказательство было сильно упрощено в работах Фринк [1] и Ароншайна [2]. Нами было приведено выше доказательство Фринк в обработке Бурбаки. Впервые теорема 6.13 в том виде, в каком она сформулирована выше, появилась в классической монографии Андре Вейля [1], в которой им было введено понятие равномерного пространства.

Отправляясь от семейства P псевдометрик на множестве X, можно следующим образом определить равномерность на X. Положим $V_{p,r}=\{(x, y): p(x, y)<r\}$. Семейство всех множеств вида $V_{p,r}$, где p — любой элемент P и r — произвольное положительное число, является предбазой некоторой равномерности $\mathfrak{B}$ на X. Эта равномерность $\mathfrak{B}$ и называется *равномерностью, порожденной семейством* P. Можно дать несколько полезных описаний построенной равномерности. Согласно теореме 6.11 псевдометрика p равномерно непрерывна на $X \times X$ относительно равномерности произведения, соответствующей $\mathfrak{B}$, тогда и только тогда, когда $V_{p,r} \in \mathfrak{B}$ при каждом положительном r. Следовательно, равномерность,

*) Здесь автор повторяет высказывание П. С. Александрова и Урысона более чем сорокалетней давности. Ныне не те времена: понятие паракомпактности позволило Бингу [1] и затем Пономареву [2] без труда изготовить из теоремы Александрова — Урысона безукоризненный топологический метризационный критерий: для метризуемости топологического пространства необходимо и достаточно, чтобы оно было паракомпактом (у Бинга — коллективно нормально) и обладало измельчающейся последовательностью покрытий. (*Прим. перев.*)

порожденная семейством P, — наименьшая равномерность, относительно которой равномерно непрерывна на $X \times X$ каждая функция $p \in P$. Другое описание: при фиксированном p из P семейство всех множеств $V_{p,r}$, где r — любое положительное число, является базой равномерности, порожденной псевдометрическим пространством (X, p). Если $\mathfrak{B}$ — какая-нибудь равномерность на X, то тождественное отображение пространства $(X, \mathfrak{B})$ в пространство (X, p) равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда $V_{p,r} \in \mathfrak{B}$ при каждом положительном r. Отсюда следует, что $\mathfrak{B}$ — наименьшая среди тех равномерностей на X, относительно которых при каждом p из P тождественное отображение X в (X, p) равномерно непрерывно. Этот факт приводит еще к одному описанию. Обозначим через Z произведение $\Pi\{X : p \in P\}$ (т. е. произведение стольких экземпляров множества X, сколько элементов в семействе P). Пусть f — отображение X в Z, определенное правилом: $f(x)_p = x$ при каждом x из X и p из P. Предположим теперь, что p-е координатное пространство рассматриваемого произведения наделено равномерностью, порожденной псевдометрикой p, и пусть Z имеет равномерность произведения. Проектирование пространства Z на p-е координатное пространство есть тождественное отображение множества X на псевдометрическое пространство (X, p). Из теоремы 6.10 следует, что равномерность, порожденная семейством P, — наименьшая среди всех, для которых определенное выше отображение f множества X в пространство Z равномерно непрерывно. Но f — взаимно однозначное отображение; значит, оно является равномерным изоморфизмом пространства X на подпространство произведения рассматриваемых псевдометрических пространств.

Понятно, что хорошо было бы знать, какие равномерности порождаются семействами псевдометрик, — эту задачу можно было бы назвать обобщенной метризационной проблемой для равномерных пространств. Решение ее получается непосредственным применением предшествующих результатов. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство и P — семейство всех псевдометрик на X, равномерно непрерывных на $X \times X$. Порожденная P равномерность меньше $\mathfrak{U}$ в силу теоремы 6.11. Но метризационная лемма 6.12 показывает, что для каждого U из $\mathfrak{U}$ существует псевдометрика $p \in P$ такая, что множество $\{(x, y) : p(x, y) < 1\}$ содержится в U; значит, равномерность $\mathfrak{U}$ меньше равномерности, порожденной семейством P.

Таким образом, имеет место

15. Теорема. *Каждая равномерность на X порождается некоторым семейством псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$.*

Эта теорема имеет интересное следствие. Уже отмечалось, что если равномерность $\mathfrak{U}$ на X порождается некоторым семейством P псевдометрик, то пространство $(X, \mathfrak{U})$ равномерно изоморфно некоторому подпространству произведения псевдометрических пространств. Заключение можно усилить, если $(X, \mathfrak{U})$ — хаусдорфово пространство. Как мы знаем, равномерность $\mathfrak{U}$ — наименьшая среди тех, относительно которых при каждом p из P равномерно непрерывно тождественное отображение пространства X на пространство (X, p). В силу теоремы 4.15 пространство (X, p) изометрично некоторому метрическому пространству (X_p, p^*) посредством некоторого отображения h_p. Следовательно, $\mathfrak{U}$ — наименьшая из равномерностей, при которых каждое из отображений h_p равномерно непрерывно. Определим отображение h множества X в $\Pi\{X_p : p \in P\}$ правилом $h(x)_p = h_p(x)$. Тогда в силу теоремы 6.10 $\mathfrak{U}$ — наименьшая из равномерностей, для которых отображение h равномерно непрерывно. Если пространство $(X, \mathfrak{U}$ хаусдорфово, то отображение h непременно взаимно однозначно; тогда h — равномерный изоморфизм. Из предыдущей теоремы вытекает поэтому такой результат (А. Вейль [1]).

16. Теорема. *Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения псевдометрических пространств, и каждое равномерное хаусдорфово пространство изоморфно подпространству произведения метрических пространств.*

Эта теорема позволяет уяснить, когда топология порождается некоторой равномерностью, — ведь топологическое пространство вполне регулярно в том и только в том случае, когда оно гомеоморфно подпространству произведения псевдометризуемых пространств (4.M).

17. Следствие. *Топология $\mathfrak{I}$ на множестве X является равномерной топологией некоторой равномерности на X в том и только в том случае, когда топологическое пространство $(X, \mathfrak{I})$ вполне регулярно.*

Остальная часть этого параграфа посвящена выяснению взаимоотношений между равномерностями и псевдометриками. Семейство P псевдометрик на множестве X называется *комплектом* тогда и только тогда, когда на X существует такая равномерность $\mathfrak{U}$, что P — семейство всех псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$ относительно равномерности произведения, соответствующей $\mathfrak{U}$. Семейство P называется комплектом равномерности $\mathfrak{U}$, и $\mathfrak{U}$ называется равномерностью комплекта P ($\mathfrak{U}$ порождается семейством P в силу теоремы 6.15). Каждое семейство псевдометрик порождает некоторую равномерность; мы будем говорить, что оно порождает и комплект псевдометрик этой равномерности. Можно дать прямое описание комплекта, порожденного семейством P псевдометрик. Семейство всех множеств вида $V_{p, r}$, где $p \in P$ и r — положительное число, является предбазой равномерности комплекта. Поэтому псевдометрика q равномерно непрерывна на произведении тогда и только тогда, когда для каждого положительного числа s множество $V_{q, s}$ содержит пересечение некоторого конечного семейства множеств вида $V_{p, r}$, где $p \in P$. Этим замечанием установлена справедливость следующего утверждения.

18. Теорема. *Пусть P—некоторое семейство псевдометрик на множестве X и Q — комплект, порожденный P. Псевдометрика q принадлежит Q в том и только в том случае, когда для каждого положительного числа s найдутся положительное число r и конечное подсемейство $p_1, \ldots, p_n$ элементов P такие, что $\bigcap \{V_{p_i, r} : i = 1, \ldots, n\} \subset V_{q, s}$.*

Каждое понятие, основанное на понятии равномерности, можно описать в терминах комплекта, так как каждая равномерность вполне определяется своим комплектом. Следующая теорема представляет собой список наиболее распространенных описаний этого рода. Напомним, что p-dist $(x, A) = \inf\{p(x, y) : y \in A\}$ — p-расстояние от точки x до множества A.

19. Теорема. *Пусть* $(X, \mathfrak{U})$ — *равномерное пространство и* P — *комплект псевдометрик равномерности* $\mathfrak{U}$. *Тогда*:

(а) *Семейство всех множеств* $V_{p,r}$, *где* $p \in P$ *и* r — *положительное число, является базой равномерности* $\mathfrak{U}$.

(б) *Замыкание подмножества* A *пространства* X *в равномерной топологии состоит из всех тех* x, *для которых* p-dist $(x, A) = 0$ *при каждом* p *из* P.

(в) *Внутренность множества* A *состоит из всех тех точек* x, *для которых* $V_{p,r}[x] \subset A$ *при некотором выборе* p *из* P *и некотором* $r > 0$.

(г) *Пусть* P' — *подсемейство семейства* P, *порождающее* P. *Направленность* $\{S_n, n \in D\}$ *в* X *сходится к точке* s *в том и только в том случае, когда* $\{p(S_n, s), n \in D\}$ *сходится к нулю при каждом* p *из* P'.

(д) *Отображение* f *пространства* X *в равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{V})$ *равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого элемента* q *комплекта* Q *равномерности* $\mathfrak{V}$ *будет* $q \cdot f_2 \in P$. (*Напоминаем, что* $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$.)

Эквивалентное утверждение: f *равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого* q *из* Q *и каждого положительного числа* s *найдутся* p *в* P *и положительное число* r *такие, что из* $p(x, y) < r$ *вытекает неравенство* $q(f(x), f(y)) < s$.

(е) *Пусть* $(X_a, \mathfrak{U}_a)$ — *равномерное пространство при каждом* a *из множества индексов* A *и* P_a — *комплект равномерности* $\mathfrak{U}_a$. *Тогда комплект равномерности произведения на* $\Pi\{X_a : a \in A\}$ *порождается всеми псевдометриками вида* $q(x, y) = p_a(x_a, y_a)$, *где* $a \in A$ *и* $p_a \in P_a$.

Доказательство опускается. Оно заключается в прямом применении полученных раньше результатов.

ПОЛНОТА

В этом параграфе излагается ряд элементарных теорем, основанных на понятии направленности Коши. Равномерное пространство будет называться полным тогда и только тогда, когда в нем каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Два самых полезных