помним, что p-dist $(x, A) = \inf\{p(x, y) : y \in A\}$ — p-расстояние от точки x до множества A.

19. Теорема. *Пусть* $(X, \mathfrak{U})$ — *равномерное пространство и* P — *комплект псевдометрик равномерности* $\mathfrak{U}$. *Тогда*:

(а) *Семейство всех множеств* $V_{p,r}$, *где* $p \in P$ *и* r — *положительное число, является базой равномерности* $\mathfrak{U}$.

(б) *Замыкание подмножества* A *пространства* X *в равномерной топологии состоит из всех тех* x, *для которых* p-dist $(x, A) = 0$ *при каждом* p *из* P.

(в) *Внутренность множества* A *состоит из всех тех точек* x, *для которых* $V_{p,r}[x] \subset A$ *при некотором выборе* p *из* P *и некотором* $r > 0$.

(г) *Пусть* P' — *подсемейство семейства* P, *порождающее* P. *Направленность* $\{S_n, n \in D\}$ *в* X *сходится к точке* s *в том и только в том случае, когда* $\{p(S_n, s), n \in D\}$ *сходится к нулю при каждом* p *из* P'.

(д) *Отображение* f *пространства* X *в равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{V})$ *равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого элемента* q *комплекта* Q *равномерности* $\mathfrak{V}$ *будет* $q \cdot f_2 \in P$. (*Напоминаем, что* $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$.)

Эквивалентное утверждение: f *равномерно непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого* q *из* Q *и каждого положительного числа* s *найдутся* p *в* P *и положительное число* r *такие, что из* $p(x, y) < r$ *вытекает неравенство* $q(f(x), f(y)) < s$.

(е) *Пусть* $(X_a, \mathfrak{U}_a)$ — *равномерное пространство при каждом* a *из множества индексов* A *и* P_a — *комплект равномерности* $\mathfrak{U}_a$. *Тогда комплект равномерности произведения на* $\Pi\{X_a : a \in A\}$ *порождается всеми псевдометриками вида* $q(x, y) = p_a(x_a, y_a)$, *где* $a \in A$ *и* $p_a \in P_a$.

Доказательство опускается. Оно заключается в прямом применении полученных раньше результатов.

ПОЛНОТА

В этом параграфе излагается ряд элементарных теорем, основанных на понятии направленности Коши. Равномерное пространство будет называться полным тогда и только тогда, когда в нем каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Два самых полезных результата этого параграфа заключаются в том, что произведение полных пространств полно и что каждое равномерно непрерывное отображение f в полное хаусдорфово пространство можно распространить на замыкание области определения f.

Всюду будет молчаливо предполагаться, что X — множество, $\mathfrak{U}$ — равномерность на X и P — ее комплект псевдометрик (т. е. P — семейство всех псевдометрик на X, равномерно непрерывных на $X\times X$). Определения будут даваться как в терминах $\mathfrak{U}$, так и в терминах P; в доказательстве используется каждый раз та формулировка, которая удобнее в рассматриваемом случае. Множество $\{(x, y) : p(x, y) < r\}$ будет обозначаться через $V_{p, r}$.

Направленность $\{S_n, n \in D\}$ в равномерном пространстве $(X, \mathfrak{U})$ называется *направленностью Коши* тогда и только тогда, когда для каждого $U \in \mathfrak{U}$ существует элемент N в D такой, что $(S_m, S_n) \in U$ при любых m и n, следующих за N в заданном на D упорядочении. Можно перевести это определение на язык направленностей в $X\times X$. Именно, направленность $\{S_n, n \in D\}$ является направленностью Коши в том и лишь в том случае, когда направленность $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D\times D\}$ лежит в произвольном элементе семейства $\mathfrak{U}$, начиная с некоторого момента. (Предполагается, что $D\times D$ наделено упорядочением произведения.) Семейство всех множеств вида $V_{p, r}$, где p принадлежит комплекту P и r — положительное число, является базой равномерности $\mathfrak{U}$. Отсюда следует, что $\{S_n, n \in D\}$ является направленностью Коши тогда и только тогда, когда направленность $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D\times D\}$, начиная с некоторого момента, находится в произвольном множестве вида $V_{p, r}$. Иными словами, $\{S_n, n \in D\}$ — направленность Коши в том и только в том случае, когда направленность $\{p(S_m, S_n), (m, n) \in D\times D\}$ сходится к нулю при любом выборе псевдометрики p из комплекта P.

Следующая простая лемма о направленностях Коши применяется весьма часто.

20. Лемма. *Направленность $\{S_n, n \in D\}$ в равномерном пространстве $(X, \mathfrak{U})$ является направленностью Коши в том и только в том случае, когда выполняется какое-нибудь из следующих условий:*

(а) *направленность* $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ *лежит в произвольном элементе какой-либо предбазы равномерности* $\mathfrak{U}$, *начиная с некоторого момента*;

(б) *направленность* $\{p(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ *сходится к нулю при каждом* p *из некоторого семейства псевдометрик, порождающего комплект* P.

Доказательство. Если Q — семейство псевдометрик, порождающее комплект P, то семейство всех множеств вида $V_{p,r}$, где $p \in Q$ и r — любое положительное число, образует предбазу рассматриваемой равномерности, так что доказательство утверждения (б) сводится к доказательству утверждения (а). Для доказательства (а) заметим, что если какая-нибудь направленность (например, $\{(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$) начиная с некоторого момента лежит в каждом элементе некоторого конечного семейства множеств, то она с некоторого момента находится и в их пересечении.

Следующее предложение выясняет соотношение между направленностями Коши и сходимостью относительно равномерной топологии.

21. Теорема. *Каждая направленность, сходящаяся относительно равномерной топологии, является направленностью Коши. Направленность Коши сходится к каждой из своих предельных точек.*

Доказательство. Если $\{S_n, n \in D\}$ сходится к точке s, то $\{d(S_n, s), n \in D\}$ сходится к нулю при любом выборе d из комплекта P. Так как $d(S_m, S_n) \leqslant d(S_m, s) + d(S_n, s)$, то отсюда следует, что $\{d(S_m, S_n), (m, n) \in D \times D\}$ сходится к нулю и, значит, исходная направленность является направленностью Коши. Предположим теперь, что $\{S_n, n \in D\}$ — направленность Коши и s — ее предельная точка. Тогда при любом выборе d из P и $r > 0$ найдется N в D, для которого из $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$ следует, что $d(S_m, S_n) < \frac{r}{2}$. Так как s — предельная точка, то существует $p \in D$, для которого $d(S_p, s) \leqslant \frac{r}{2}$ и $p \geqslant N$. Тогда $d(S_n, s) \leqslant d(S_n, S_p) + d(S_p, s) < r$ при $n \geqslant p$. Следовательно, рассматриваемая направленность сходится к s.

Равномерное пространство называется *полным* тогда и только тогда, когда в нем каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Очевидно, каждое замкнутое подпространство полного пространства $(X, \mathfrak{U})$ само полно. Если $(X, \mathfrak{U})$ — хаусдорфово пространство, $(Y, \mathfrak{B})$ — его полное подпространство, то Y замкнуто в X, ибо любая направленность в Y, сходящаяся к некоторой точке $x \in X$, непременно является направленностью Коши, и x — ее единственная предельная точка. Этот очевидный результат — один из наиболее полезных фактов, касающихся понятия полноты.

22. Теорема. *Замкнутое подпространство полного пространства полно, и полное подпространство хаусдорфова равномерного пространства замкнуто.*

Прежде чем двигаться дальше, вероятно, полезно привести несколько примеров равномерных пространств. Пусть $\mathfrak{U}$ — наибольшая из всех равномерностей для X (она состоит из всех подмножеств произведения $X \times X$, содержащих диагональ); тогда $(X, \mathfrak{U})$ — полное пространство. Наименьшая равномерность на X также дает полное пространство. Если равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ бикомпактно в равномерной топологии, то оно и полное, ибо у каждой направленности в этом пространстве есть тогда предельная точка и, следовательно, в силу теоремы 6.21 каждая направленность Коши сходится к некоторой точке. Пространство вещественных чисел полно относительно обычной равномерности. В этом легко убедиться, заметив, что каждая направленность Коши с некоторого момента находится в ограниченном подмножестве A пространства вещественных чисел и, значит, с некоторого момента лежит в бикомпактном множестве $\bar{A}$.

Существует характеристика полноты, навеянная понятием бикомпактности. Напомним, что семейство множеств называется центрированным в том и лишь в том случае, когда пересечение любого конечного множества элементов этого семейства не пусто. Топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда каждое центрированное семейство замкнутых множеств имеет непустое пересечение. При описании полноты на центрированные семейства налагается еще одно ограничение. Говорят, что семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ содержит *мелкие множества*, в том и только в том случае, когда для каждого U из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{A}$ найдется элемент A, содержащийся в качестве подмножества в $U[x]$ при некотором выборе точки x. Другая формулировка: для каждого U из $\mathfrak{U}$ существует A в $\mathfrak{A}$ такое, что $A \times A \subset U$. В терминах комплекта P псевдометрик равномерного пространства семейства, содержащие мелкие множества, характеризуются тем, что при каждом положительном r и любом d из P найдется элемент A в $\mathfrak{A}$, d-диаметр которого меньше r. Мы опускаем доказательство равносильности этих трех утверждений.

23. Теорема*). *Равномерное пространство полно в том и только в том случае, когда каждое центрированное семейство его замкнутых подмножеств, содержащее мелкие множества, имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — полное равномерное пространство и $\mathfrak{A}$ — произвольное центрированное семейство его замкнутых подмножеств, содержащее мелкие множества. Рассмотрим семейство $\mathfrak{F}$ всевозможных конечных пересечений элементов из $\mathfrak{A}$; оно направлено отношением включения $\subset$. Из каждого элемента F семейства $\mathfrak{F}$ можно выбрать по точке x_F. Направленность $\{x_F, \ F \in \mathfrak{F}\}$ является направленностью Коши, ибо если A и B следуют при упорядочении $\subset$ за элементом F из $\mathfrak{F}$ (т. е. если $A \subset F$ и $B \subset F$), то точки x_A и x_B входят в F, а $\mathfrak{F}$ содержит мелкие множества. Следовательно, направленность $\{x_F : F \in \mathfrak{F}\}$ сходится, а так как она с некоторого момента находится в любом наперед заданном элементе семейства $\mathfrak{F}$, то точка, к которой она сходится, должна принадлежать каждому элементу семейства $\mathfrak{F}$. Значит, пересечение $\bigcap\{A : A \in \mathfrak{A}\}$ не пусто. Докажем обратное утверждение. Пусть $\{x_n, \ n \in D\}$ — некоторая направленность Коши и при каждом n из D A_n — множество всех точек x_m, для которых $m \geqslant n$.

*) Фильтр называется *фильтром Коши*, если он содержит мелкие множества. При этом соглашении нашу теорему можно сформулировать так: пространство полно в том и только в том случае, когда каждый фильтр Коши сходится к некоторой точке.

Семейство $\mathfrak{A}$ всех множеств вида A_n центрировано, а так как рассматриваемая направленность является направленностью Коши, то $\mathfrak{A}$ содержит мелкие множества. Следовательно, существует точка y, принадлежащая пересечению замыканий всех множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, т. е. множеству $\bigcap\{\bar{A}_n : n \in D\}$. В силу 2.7 точка y является предельной для направленности $\{x_n, n \in D\}$. Так как $\{x_n, n \in D\}$ — направленность Коши, то она сходится к y.

Кое-кто мог бы предположить, что равномерное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, будет полным, если каждая последовательность Коши в этом пространстве сходится к некоторой его точке. К сожалению, эта гипотеза не оправдывается; однако верен следующий более слабый результат.

24. Теорема. *Псевдометризуемое равномерное пространство полно в том и только в том случае, когда каждая последовательность Коши в этом пространстве сходится к некоторой его точке.*

Доказательство. Если равномерное пространство X полно, то каждая направленность Коши в X и, в частности, каждая последовательность Коши в X сходятся. Обратно, предположим, что (X, d) — псевдометрическое пространство, в котором каждая последовательность Коши сходится, и пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное центрированное семейство замкнутых в X множеств, содержащее мелкие множества. Для каждого целого неотрицательного числа n выберем в $\mathfrak{A}$ элемент A_n, диаметр которого меньше 2^{-n}, а в A_n выберем произвольную точку x_n. Если m и n велики, то $d(x_m, x_n)$ мало, ибо точки x_m и x_n принадлежат, соответственно, пересекающимся множествам B_m и B_n малого диаметра. Значит $\{x_n, n \in \omega\}$ — последовательность Коши, поэтому она сходится к некоторой точке y пространства X. Каков бы ни был элемент B семейства $\mathfrak{A}$, $\operatorname{dist}(x_n, B) < 2^{-n}$, ибо B пересекается с A_n. Отсюда следует, что точка y принадлежит замыканию множества B. Так как все элементы семейства $\mathfrak{A}$ — замкнутые множества, то y принадлежит им всем.

Обычный путь доказательства полноты заключается в обнаружении того, что рассматриваемое пространство равномерно изоморфно замкнутому подпространству произведения полных пространств, с последующей ссылкой на теорему, идущую ниже. В ее доказательстве мы пользуемся тем, что образ направленности Коши при равномерно непрерывном отображении является направленностью Коши, — фактом, с очевидностью вытекающим из определений.

25. Теорема. *Произведение равномерных пространств полно в том и только в том случае, когда каждое координатное пространство полно.*

Направленность в произведении является направленностью Коши в том и только в том случае, когда каждая ее проекция в кординатное пространство является направленностью Коши.

Доказательство. Пусть $(Y_a, \mathfrak{U}_a)$ — полное равномерное пространство при каждом a из некоторого множества индексов A. Проекция произвольной направленности Коши в пространство Y_a является направленностью Коши при любом a и, следовательно, сходится к некоторой точке, скажем, к точке y_a. Тогда направленность, рассматриваемая в произведении, сходится к точке y, a-й координатой которой служит y_a. Следовательно, произведение полно. Простое доказательство обратного утверждения опускается.

Если направленность $\{x_n, n \in D\}$ в произведении такова, что ее проекция в любое координатное пространство является направленностью Коши, то для каждого U из $\mathfrak{U}_a$ направленность $\{(x_m, x_n), \ (m, n) \in D \times D\}$ с некоторого момента находится в прообразе множества U относительно проектирования. Иными словами, $\{(x_m, x_n), (m, n) \in (D \times D)\}$ с некоторого момента находится в множестве $\{(x, z): (x_a, z_a) \in U\}$. Так как семейство множеств этого вида образует предбазу равномерности произведения, то отсюда следует (лемма 6.20), что $\{x_n, n \in D\}$ является направленностью Коши.

Отображение f *равномерно непрерывно* на подмножестве A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ тогда и только тогда, когда его сужение на A, $f|A$, равномерно непрерывно по отношению к равномерности, индуцированной на A. Если пространство значений полно и хаусдорфово *), а отображение f равномерно непрерывно на своей области определения A, то его можно единственным способом продолжить до равномерно непрерывного отображения, определенного на замыкании множества A.

26. Теорема. *Пусть f — функция, областью определения которой служит подмножество A равномерного пространства* $(X, \mathfrak{U})$ *со значениями в полном хаусдорфовом равномерном пространстве* $(Y, \mathfrak{V})$. *Если f равномерно непрерывна на A, то существует и единственно равномерно непрерывное продолжение $\bar{f}$ функции f, областью определения которого служит замыкание множества A.*

Доказательство. Функция f — это подмножество произведения $X \times Y$ (мы отождествляем здесь функцию с ее графиком); искомое продолжение — это замыкание $\bar{f}$ множества f в $X \times Y$. (Пара (x, y) принадлежит $\bar{f}$ тогда и только тогда, когда в A существует направленность, сходящаяся к x, образ которой сходится к y.) Областью определения функции $\bar{f}$ является, очевидно, замыкание множества A. Мы покажем, что если W — элемент семейства $\mathfrak{V}$, то существует U в $\mathfrak{U}$, для которого из $(x, y) \in \bar{f}$, $(u, v) \in \bar{f}$ и $x \in U[u]$ следует, что $y \in W[v]$. Так как пространство Y хаусдорфово, то это будет означать, что $\bar{f}$ — функция, причем равномерно непрерывная. Выберем в $\mathfrak{V}$ замкнутый и симметричный элемент V, для которого $V \circ V \subset W$, и в $\mathfrak{U}$ выберем открытый и симметричный элемент U такой, что $f[U[x]] \subset V[f(x)]$ при каждом x из A. Пусть (x, y) и (u, v) входят в $\bar{f}$ и $x \in U[u]$. Пересечение множеств $U[x]$ и $U[u]$ открыто; следовательно, существует такая точка z в A, что и x, и u принадлежат множеству $U[z]$. Точки y и v принадлежат замыканию множества $f[U[z]]$ по определению $\bar{f}$; значит, как y, так и v входят в множество $V[f(z)]$. Следовательно, $(y, v) \in V \circ V \subset W$ и $y \in W[v]$.

ПОПОЛНЕНИЕ

Цель этого параграфа — показать, что каждое равномерное пространство равномерно изоморфно всюду

*) Чтобы продолжение существовало, не обязательно требовать хаусдорфовости, однако хаусдорфовость является необходимым условием единственности продолжения.