хаусдорфово*), а отображение f равномерно непрерывно на своей области определения A, то его можно единственным способом продолжить до равномерно непрерывного отображения, определенного на замыкании множества A.

26. Теорема. *Пусть f — функция, областью определения которой служит подмножество A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ со значениями в полном хаусдорфовом равномерном пространстве $(Y, \mathfrak{V})$. Если f равномерно непрерывна на A, то существует и единственно равномерно непрерывное продолжение $\bar{f}$ функции f, областью определения которого служит замыкание множества A.*

Доказательство. Функция f — это подмножество произведения $X \times Y$ (мы отождествляем здесь функцию с ее графиком); искомое продолжение — это замыкание $\bar{f}$ множества f в $X \times Y$. (Пара (x, y) принадлежит $\bar{f}$ тогда и только тогда, когда в A существует направленность, сходящаяся к x, образ которой сходится к y.) Областью определения функции $\bar{f}$ является, очевидно, замыкание множества A. Мы покажем, что если W — элемент семейства $\mathfrak{V}$, то существует U в $\mathfrak{U}$, для которого из $(x, y) \in \bar{f}$, $(u, v) \in \bar{f}$ и $x \in U[u]$ следует, что $y \in W[v]$. Так как пространство Y хаусдорфово, то это будет означать, что $\bar{f}$ — функция, причем равномерно непрерывная. Выберем в $\mathfrak{V}$ замкнутый и симметричный элемент V, для которого $V \circ V \subset W$, и в $\mathfrak{U}$ выберем открытый и симметричный элемент U такой, что $f[U[x]] \subset V[f(x)]$ при каждом x из A. Пусть (x, y) и (u, v) входят в $\bar{f}$ и $x \in U[u]$. Пересечение множеств $U[x]$ и $U[u]$ открыто; следовательно, существует такая точка z в A, что и x, и u принадлежат множеству $U[z]$. Точки y и v принадлежат замыканию множества $f[U[z]]$ по определению $\bar{f}$; значит, как y, так и v входят в множество $V[f(z)]$. Следовательно, $(y, v) \in V \circ V \subset W$ и $y \in W[v]$.

ПОПОЛНЕНИЕ

Цель этого параграфа — показать, что каждое равномерное пространство равномерно изоморфно всюду

*) Чтобы продолжение существовало, не обязательно требовать хаусдорфовости, однако хаусдорфовость является необходимым условием единственности продолжения.

плотному подпространству полного равномерного пространства. Иными словами, можно присоединить к произвольному равномерному пространству «идеальные элементы» так, что получится полное равномерное пространство. Процедура этого присоединения напоминает процесс бикомпактного расширения из пятой главы *); но есть одно существенное отличие: пополнение равномерного пространства определено, по существу, однозначно.

Для любого метрического пространства X можно найти такое полное метрическое пространство X^*, что X *изометрично* (а не только равномерно изоморфно) некоторому всюду плотному подпространству пространства X^*. Общую конструкцию пополнения мы построим, отправляясь от этого предварительного результата.

27. Теорема. *Каждое метрическое (или псевдометрическое) пространство можно взаимно однозначно и изометрично отобразить на всюду плотное подмножество полного метрического (соответственно псевдометрического) пространства.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая псевдометрического пространства (X, d); соответствующий результат для метрических пространств будет следовать тогда из теоремы 4.15. Обозначим через X^* класс всех последовательностей Коши в X и для произвольных S и T из X^* определим $d^*(S, T)$ как предел числовой последовательности $d(S_m, T_m)$ при неограниченном росте m (формально речь идет о пределе направленности $\{d(S_m, T_m), m \in \omega\}$). Легко проверяется, что d^* является псевдометрикой на X^*. Обозначим через F отображение, переводящее произвольную точку x пространства X в постоянную последовательность со значением x. Таким образом, $F(x)_n = x$ при всех n. Очевидно, что F — взаимно однозначная изометрия; остается доказать только, что $F[X]$ всюду плотно в X^* и что пространство X^* полно. Первое из этих утверждений очевидно: если $S \in X^*$ и n достаточно велико, то точка $F(S_n)$ лежит вблизи от точки S. Покажем, что пространство X^* полно.

---

*) Она гораздо больше напоминает классическое построение пополнения метрического пространства! (*Прим. перев.*)

Достаточно в силу плотности подпространства $F[X]$ в пространстве X^* доказать, что каждая направленность Коши в $F[X]$ сходится к точке из X^*. Но каждая последовательность Коши в $F[X]$ имеет вид $F \circ S = \{F(S_n),\ n \in \omega\}$, где S — последовательность Коши в X; ясно, что последовательность $F \circ S$ сходится в X^* к точке S.

Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения псевдометрических пространств; при этом каждое хаусдорфово равномерное пространство равномерно изоморфно подпространству произведения метрических пространств в силу теоремы 6.16. Предыдущая теорема означает, что произвольное метрическое или псевдометрическое пространство равномерно изоморфно подпространству полного пространства того же типа. Отсюда сразу вытекает

28. Теорема. *Каждое равномерное пространство равномерно изоморфно всюду плотному подпространству некоторого полного равномерного пространства. Каждое хаусдорфово равномерное пространство равномерно изоморфно всюду плотному подпространству полного хаусдорфова равномерного пространства.*

Пополнением равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ называется любая пара $(f, (X^*, \mathfrak{U}^*))$, где $(X^*, \mathfrak{U}^*)$ — полное равномерное пространство и f — равномерный изоморфизм пространства X на некоторое всюду плотное подпространство пространства X^*. Пополнение называют хаусдорфовым тогда и только тогда, когда $(X^*, \mathfrak{U}^*)$ — хаусдорфово равномерное пространство. Предыдущую теорему можно теперь переформулировать так: *каждое* (*хаусдорфово*) *равномерное пространство обладает* (*хаусдорфовым*) *пополнением.*

Для хаусдорфовых пополнений имеет место утверждение о единственности. Если f и g — равномерные изоморфизмы пространства X на всюду плотные подпространства полных хаусдорфовых равномерных пространств X^* и X^{**} соответственно, то каждое из отображений $g \circ f^{-1}$ и $f \circ g^{-1}$ обладает равномерно непрерывным продолжением на X^* (соответственно на X^{**}) в силу теоремы 6.26. Отсюда следует, что продолжение отображения $g \circ f^{-1}$ является равномерным изоморфизмом пространства X^* на пространство X^{**}. Говоря попросту, *хаусдорфово пополнение хаусдорфова равномерного пространства единственно с точностью до равномерного изоморфизма.*

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Каждая вполне регулярная топология $\mathfrak{J}$ на множестве X является равномерной топологией, соответствующей некоторой равномерности $\mathfrak{U}$; однако такая равномерность в большинстве случаев не единственна. Если же пространство $(X, \mathfrak{J})$ бикомпактно и регулярно, то, оказывается, существует в точности одна равномерность, порождающая топологию $\mathfrak{J}$. В этом случае топология определяет равномерность, топологические инварианты являются равномерными инвариантами и вся теория приобретает особенно простой вид. Этот параграф посвящен доказательству только что сформулированной теоремы о единственности и еще двух утверждений. Как и раньше, в зависимости от того, что удобнее, мы будем оперировать либо равномерностями, либо комплектами псевдометрик.

29. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — бикомпактное равномерное пространство. Тогда каждая окрестность диагонали Δ в произведении $X \times X$ принадлежит $\mathfrak{U}$ и каждая псевдометрика, непрерывная на $X \times X$, принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех замкнутых элементов семейства $\mathfrak{U}$, и пусть V — произвольная открытая окрестность диагонали Δ. Если $(x, y) \in \bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}\}$, то, так как $\mathfrak{B}$ является базой равномерности $\mathfrak{U}$, точка y принадлежит произвольной окрестности точки x и, значит, (x, y) входит в каждую окрестность диагонали Δ. Следовательно, множество $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}\}$ является подмножеством множества V. Так как каждый элемент U семейства $\mathfrak{B}$ бикомпактен, а V — открытое множество, то пересечение некоторого конечного множества элементов семейства $\mathfrak{B}$ тоже является подмножеством множества V; значит, $V \in \mathfrak{U}$.

Если псевдометрика d, заданная на X, непрерывна на $X \times X$, то множество $\{(x, y) : d(x, y) < r\}$ при каждом