странства X^* на пространство X^{**}. Говоря попросту, *хаусдорфово пополнение хаусдорфова равномерного пространства единственно с точностью до равномерного изоморфизма.*

БИКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Каждая вполне регулярная топология $\mathfrak{J}$ на множестве X является равномерной топологией, соответствующей некоторой равномерности $\mathfrak{U}$; однако такая равномерность в большинстве случаев не единственна. Если же пространство $(X, \mathfrak{J})$ бикомпактно и регулярно, то, оказывается, существует в точности одна равномерность, порождающая топологию $\mathfrak{J}$. В этом случае топология определяет равномерность, топологические инварианты являются равномерными инвариантами и вся теория приобретает особенно простой вид. Этот параграф посвящен доказательству только что сформулированной теоремы о единственности и еще двух утверждений. Как и раньше, в зависимости от того, что удобнее, мы будем оперировать либо равномерностями, либо комплектами псевдометрик.

29. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — бикомпактное равномерное пространство. Тогда каждая окрестность диагонали Δ в произведении $X \times X$ принадлежит $\mathfrak{U}$ и каждая псевдометрика, непрерывная на $X \times X$, принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех замкнутых элементов семейства $\mathfrak{U}$, и пусть V — произвольная открытая окрестность диагонали Δ. Если $(x, y) \in \bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}\}$, то, так как $\mathfrak{B}$ является базой равномерности $\mathfrak{U}$, точка y принадлежит произвольной окрестности точки x и, значит, (x, y) входит в каждую окрестность диагонали Δ. Следовательно, множество $\bigcap\{U : U \in \mathfrak{B}\}$ является подмножеством множества V. Так как каждый элемент U семейства $\mathfrak{B}$ бикомпактен, а V — открытое множество, то пересечение некоторого конечного множества элементов семейства $\mathfrak{B}$ тоже является подмножеством множества V; значит, $V \in \mathfrak{U}$.

Если псевдометрика d, заданная на X, непрерывна на $X \times X$, то множество $\{(x, y) : d(x, y) < r\}$ при каждом положительном r является окрестностью диагонали. Значит, функция d равномерно непрерывна; поэтому она принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$.

Каждое бикомпактное регулярное топологическое пространство вполне регулярно; его топология является, следовательно, равномерной топологией некоторой равномерности, — последняя только что была указана.

30. Следствие. *Если $(X, \mathfrak{J})$ — бикомпактное регулярное топологическое пространство, то семейство всех окрестностей диагонали Δ образует равномерность на X, равномерная топология которой совпадает с $\mathfrak{J}$.*

Вот другое следствие.

31. Теорема. *Каждое непрерывное отображение бикомпактного равномерного пространства в равномерное пространство равномерно непрерывно.*

Доказательство. Если f — непрерывное отображение X в Y, то f_2, где $f_2(x, y) = (f(x), f(y))$, — непрерывное отображение пространства $X \times X$ в пространство $Y \times Y$. Следовательно, если d входит в комплект псевдометрик, отвечающий пространству Y, то композиция $d \circ f_2$ непрерывна на $X \times X$. Из теоремы 6.29 следует тогда, что $d \circ f_2$ принадлежит комплекту псевдометрик пространства X; значит, отображение f равномерно непрерывно.

Каждое бикомпактное равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ можно представить в виде объединения конечного семейства мелких множеств — точнее, для каждой псевдометрики d из комплекта равномерности $\mathfrak{U}$ и любого положительного числа r существует конечное покрытие пространства X множествами, d-диаметр каждого из которых меньше r. Это вытекает непосредственно из бикомпактности пространства X: его можно покрыть конечным числом $\frac{r}{3}$-шаров; диаметр каждого такого шара меньше r. Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *вполне ограниченным* (или *предкомпактным*) тогда и только тогда, когда X является объединением конечного семейства множеств d-диаметра, меньшего r, при любом выборе псевдометрики d из комплекта равномерности $\mathfrak{U}$ и положительного числа r. В терминах $\mathfrak{U}$ это условие можно сформулировать так: для каждого U из $\mathfrak{U}$ множество X представляется в виде объединения конечного числа таких множеств B, что $B\times B\subset U$, или, что эквивалентно, при каждом U из $\mathfrak{U}$ существует конечное подмножество F в X, для которого $U[F]=X$. Подмножество Y равномерного пространства называется *вполне ограниченным* тогда и только тогда, когда Y, наделенное индуцированной из $(X, \mathfrak{U})$ равномерностью, вполне ограничено.

Есть одно простое, но очень полезное соотношение между бикомпактностью и вполне ограниченностью.

32. Теорема. *Равномерное пространство* $(X, \mathfrak{U})$ *вполне ограничено в том и только в том случае, когда каждая направленность в* X *обладает поднаправленностью Коши.*

Следовательно, равномерное пространство бикомпактно в том и только в том случае, когда оно вполне ограничено и полно.

Доказательство. Пусть S — произвольная направленность во вполне ограниченном равномерном пространстве $(X, \mathfrak{U})$. Существование в ней поднаправленности Коши, очевидно, вытекает из утверждения задачи 2.К. Однако мы дадим здесь набросок доказательства интересующего нас факта, не опирающегося на этот предшествующий результат. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всех подмножеств A пространства X, в каждое из которых S попадает часто. Тогда $\{X\}\subset\mathfrak{A}$ и в силу принципа максимальности 0.25 существует максимальное центрированное подсемейство $\mathfrak{B}$ семейства $\mathfrak{A}$, содержащее $\{X\}$. Из максимальности $\mathfrak{B}$ следует, что если объединение конечного числа элементов $B_1, \ldots, B_n$ семейства $\mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{B}$, то $B_i\in B$ при некотором i (подробное рассуждение можно найти в 2.И). Так как пространство X вполне ограничено, его можно покрыть конечным семейством мелких множеств. Отсюда следует, что $\mathfrak{B}$ содержит (как угодно) мелкие множества. Наконец, из 2.5 вытекает, что в S существует поднаправленность, которая, начиная с некоторого момента, находится в произвольно выбранном элементе семейства $\mathfrak{B}$; очевидно, она является поднаправленностью Коши.

Если пространство $(X, \mathfrak{U})$ не вполне ограничено, то $U[F]\neq X$ для некоторого $U\in\mathfrak{U}$ и любого конечного подмножества $F\subset X$. Следовательно, по индукции можно построить последовательность $\{x_n, n \in \omega\}$ такую, что $x_n \notin U[x_p]$ при $p<n$. Ясно, что последовательность $\{x_n, n \in \omega\}$ не имеет поднаправленности Коши.

Наконец, если пространство $(X, \mathfrak{U})$ полно и вполне ограничено, то каждая направленность в X обладает поднаправленностью, сходящейся к некоторой точке множества X. Значит, пространство $(X, \mathfrak{U})$ бикомпактно. Ранее уже отмечалось, что каждое бикомпактное пространство полно.

Есть еще одна очень полезная лемма о бикомпактных пространствах. Она обобщает лемму Лебега о покрытии (5.26). Покрытие подмножества A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ называется *равномерным покрытием* тогда и только тогда, когда существует такой элемент U равномерности $\mathfrak{U}$, что множество $U[x]$ является подмножеством некоторого элемента рассматриваемого покрытия для каждого x (т. е. семейство множеств $U[x]$ вписано в заданное покрытие). В терминах комплекта псевдометрик равномерности $\mathfrak{U}$ это условие звучит так: покрытие множества A равномерно в том и только в том случае, когда существует элемент p комплекта и положительное число r такие, что открытый шар d-радиуса r с центром в произвольной точке множества A содержится в некотором элементе этого покрытия.

33. Теорема. *Каждое открытое покрытие бикомпактного подмножества равномерного пространства является равномерным покрытием.*

В частности, каждая окрестность бикомпактного подмножества A содержит окрестность вида $U[A]$, где U — некоторый элемент равномерности.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — открытое покрытие бикомпактного подмножества A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$. Для каждого $x \in A$ найдется такой элемент $U \in \mathfrak{U}$, что $U[x]$ содержится в качестве подмножества в некотором элементе семейства $\mathfrak{A}$. Поэтому существует $V \in \mathfrak{U}$, для которого $V \circ V[x]$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{A}$. Выберем конечное семейство точек $x_1, \ldots, x_n$ множества A и конечное семейство элементов $V_1, \ldots, V_n$ равномерности $\mathfrak{U}$ так, чтобы множества $V_i[x_i]$ покрывали в совокупности множество A и при каждом i $V_i \circ V_i[x_i]$ было подмножеством некоторого элемента семейства $\mathfrak{A}$. Наконец, положим $W = \bigcap \{V_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда для каждой точки y множества A y принадлежит $V_i[x_i]$ при некотором i; значит, $W[y] \subset \subset W \circ V_i[x_i] \subset V_i \circ V_i[x_i]$. Следовательно, $W[y]$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{A}$.

ТОЛЬКО ДЛЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Этот параграф посвящен двум утверждениям про полные метрические пространства. Эти утверждения следует отнести к числу наиболее полезных следствий полноты; к несчастью, обобщить их на полные равномерные пространства не представляется возможным. Первое из них — это классическая теорема Бэра о множествах второй категории. Эта теорема и один или два связанных с ней результата занимают бóльшую часть параграфа. В последней теореме параграфа устанавливается, что образ полного метрического пространства при непрерывном равномерно открытом отображении является полным пространством в предположении, что пространство значений хаусдорфово. Доказательство этой теоремы основано на лемме, которую мы формулируем в значительно более общем виде, чем это необходимо для самой теоремы. Из этой леммы (по существу, формализующей рассуждение Банаха) непосредственно получаются и теорема о замкнутом графике, и теорема об открытом отображении из теории нормированных линейных пространств (см. задачу 6.Т).

34. Теорема (Бэр). *Пусть X — либо полное псевдометрическое пространство, либо локально бикомпактное регулярное пространство. Тогда пересечение счетного семейства открытых подмножеств, всюду плотных в X, само всюду плотно в X.*

Доказательство. Рассуждение ведется для случая локально бикомпактного регулярного пространства, а в скобках указывается, какие надо сделать изменения в случае полного псевдометрического пространства. Пусть $\{G_n, n \in \omega\}$ — последовательность открытых всюду плотных подмножеств пространства X и U — произволь-