каждом i $V_i \circ V_i[x_i]$ было подмножеством некоторого элемента семейства $\mathfrak{A}$. Наконец, положим $W = \bigcap\{V_i : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда для каждой точки y множества A y принадлежит $V_i[x_i]$ при некотором i; значит, $W[y] \subset W \circ V_i[x_i] \subset V_i \circ V_i[x_i]$. Следовательно, $W[y]$ является подмножеством некоторого элемента из $\mathfrak{A}$.

ТОЛЬКО ДЛЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Этот параграф посвящен двум утверждениям про полные метрические пространства. Эти утверждения следует отнести к числу наиболее полезных следствий полноты; к несчастью, обобщить их на полные равномерные пространства не представляется возможным. Первое из них — это классическая теорема Бэра о множествах второй категории. Эта теорема и один или два связанных с ней результата занимают бо́льшую часть параграфа. В последней теореме параграфа устанавливается, что образ полного метрического пространства при непрерывном равномерно открытом отображении является полным пространством в предположении, что пространство значений хаусдорфово. Доказательство этой теоремы основано на лемме, которую мы формулируем в значительно более общем виде, чем это необходимо для самой теоремы. Из этой леммы (по существу, формализующей рассуждение Банаха) непосредственно получаются и теорема о замкнутом графике, и теорема об открытом отображении из теории нормированных линейных пространств (см. задачу 6.Т).

34. Теорема (Бэр). *Пусть X — либо полное псевдометрическое пространство, либо локально бикомпактное регулярное пространство. Тогда пересечение счетного семейства открытых подмножеств, всюду плотных в X, само всюду плотно в X.*

Доказательство. Рассуждение ведется для случая локально бикомпактного регулярного пространства, а в скобках указывается, какие надо сделать изменения в случае полного псевдометрического пространства. Пусть $\{G_n, n \in \omega\}$ — последовательность открытых всюду плотных подмножеств пространства X и U — произвольное непустое множество, открытое в X. Надо показать, что $U \cap \bigcap \{G_n : n \in \omega\}$ не пусто. С этой целью начнем индуктивный процесс, выбрав такое открытое множество V_0, что $\overline{V}_0$ является бикомпактным подмножеством множества $U \cap G_0$ (что $\overline{V}_0$ содержится в $U \cap G_0$ и имеет диаметр, меньший единицы), и затем для каждого целого положительного n найдем V_n так, чтобы $\overline{V}_n$ было подмножеством множества $V_{n-1} \cap G_n$ (и чтобы диаметр V_n был меньше $\frac{1}{n}$). Возможность такого выбора следует из того, что все G_n — открытые всюду плотные множества. Семейства всех $\overline{V}_n$, где n — любое целое неотрицательное число, центрировано и состоит из замкнутых множеств; при этом $\overline{V}_0$ бикомпактно (семейство содержит мелкие множества). Следовательно, множество $\bigcap \{\overline{V}_n : n \in \omega\}$ не пусто. Так как $\overline{V}_{n+1} \subset U \cap G_n$, то отсюда следует, что $U \cap \bigcap \{G_n : n \in \omega\}$ не пусто.

Отметим, что теорема Бэра носит смешанный характер: топологическое заключение (пересечение счетного семейства открытых всюду плотных подмножеств всюду плотно) выводится из нетопологических посылок (что пространство полное псевдометрическое). Есть чисто топологическое утверждение, эквивалентное теореме Бэра. Если $(X, \mathfrak{I})$ — топологическое пространство, полное относительно некоторой псевдометрики d, согласующейся с топологией $\mathfrak{I}$, то имеет место то же заключение. (Топологические пространства, на которых существует полная метрика, можно охарактеризовать и совсем по-другому — как указано в 6.Л.)

Для обсуждения вопросов, связанных с теоремой Бэра, выработана очень удобная терминология. Подмножество A топологического пространства X называется *нигде не плотным* в X тогда и только тогда, когда внутренность замыкания множества A пуста. Иными словами, A нигде не плотно в X тогда и только тогда, когда открытое множество $X \setminus \overline{A}$ всюду плотно в X. Очевидно, что объединение конечного семейства нигде не плотных множеств нигде не плотно. Подмножество A называется *худым* в X, или *первой категории* в X, в том и только в том случае, когда A можно представить в виде объединения счетного семейства множеств, нигде не плотных в X. Теорему Бэра можно теперь сформулировать так: дополнение к худому подмножеству полного метрического пространства всюду плотно в последнем. (Дополнение к худому множеству называют иногда *существенным* в X.)

Говорят, что множество A *нехудое* в X, или что оно *второй категории* в X, тогда и только тогда, когда оно не является худым в X. Следующий результат представляет собой разновидность локализационной теоремы. Из того, что множество A нехудое, мы выводим существование точки x, с любой окрестностью которой множество A пересекается по нехудому множеству. При этом иногда говорят, что A — второй категории в такой точке x.

35. Теорема. *Пусть A — какое-нибудь подмножество топологического пространства X и $M(A)$ — объединение всех открытых множеств V, для которых $V \cap A$ — худое множество в X. Тогда $A \cap \overline{M(A)}$ — худое множество в X.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U}$ — семейство попарно непересекающихся открытых множеств, максимальное относительно следующего свойства: если $U \in \mathfrak{U}$, то $U \cap A$ — худое множество. Такое семейство $\mathfrak{U}$ существует в силу принципа максимальности 0.25. Положим $W = \bigcup \{U : U \in \mathfrak{U}\}$. Доказательство теоремы сводится к проверке того, что $W \cap A$ является худым множеством. В самом деле, если последнее верно, то $A \cap \overline{W}$ — худое множество, ибо множество $\overline{W} \setminus W$ нигде не плотно. Из максимальности семейства $\mathfrak{U}$ следует, что $\overline{W}$ содержит любое открытое множество V, пересекающееся с A по худому множеству. Чтобы доказать, что множество $W \cap A$ худое, представим множество $U \cap A$ для каждого U из $\mathfrak{U}$ в виде $\bigcup \{U_n : n \in \omega\}$, где каждое U_n — нигде не плотное множество. Из того, что множества семейства $\mathfrak{U}$ попарно не пересекаются, следует тогда, что множество $\bigcup \{U_n : U \in \mathfrak{U}\}$ нигде не плотно для каждого целого числа $n \geqslant 0$. Значит, $W \cap A$ — худое множество.

Важным следствием предшествующей теоремы является тот факт, что если A — нехудое подмножество топологического пространства, то существует непустое открытое множество V такое, что пересечение множества

A с произвольной окрестностью произвольной точки множества $\overline{V}$ является нехудым множеством.

Заключительная теорема этой главы показывает, что полнота сохраняется при отображениях определенного сорта. Отображение равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ называется *равномерно открытым* тогда и только тогда, когда для каждого U из $\mathfrak{U}$ существует элемент V из $\mathfrak{V}$ такой, что $f[U[x]] \supset V[f(x)]$ при каждом $x \in X$. Не верно, что равномерно открытые отображения сохраняют полноту в классе произвольных равномерных пространств. Кёте [1] построил пример полного линейного топологического пространства и такого замкнутого подпространства в нем, что соответствующее фактор-пространство не полно. Теорема, которую мы собираемся установить, касается, подобно теореме Бэра, лишь псевдометрических пространств.

Доказательство ее, данное здесь, основано на лемме, у которой есть и другие глубокие следствия (см. 6.Т). Эта лемма касается некоторого отношения R между точками псевдометрического пространства (X, d) и равномерного пространства $(Y, \mathfrak{V})$ (таким образом, R является подмножеством произведения $X \times Y$). Положим $U_r = \{(x, y) : d(x, y) < r\}$; при этом $U_r[x]$ — просто r-шар с центром в x.

36. Лемма. *Пусть R — замкнутое подмножество произведения полного псевдометрического пространства (X, d) на равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Предположим, что для каждого положительного r существует такой элемент $V \in \mathfrak{V}$, что $\overline{R[U_r[x]]} \supset V[y]$ при любом (x, y) из R. Тогда для любых $r > 0$ и $e > 0$ имеют место соотношения*

$$R[U_{r+e}[x]] \supset \overline{R[U_r[x]]} \supset V[y].$$

Доказательство. Основной факт, нужный для доказательства, таков: если $v \in \overline{R[A]}$, где A — подмножество множества X, то существует множество B сколь угодно малого диаметра такое, что $v \in \overline{R[B]}$ и $A \cap B$ не пусто. Это вытекает из следующих соображений. Если r — произвольное положительное число, V — симметричный элемент семейства $\mathfrak{B}$ такой, что $\overline{R[U_r[x]]}\supset V[y]$ для любого элемента (x, y) множества R, v' — такая точка множества $R[A]$, что $v'\in V[v]$ и точка u множества A удовлетворяет условию $(u, v')\in R$, то $v\in V[v']\subset\overline{R[U_r[u]]}$, причем диаметр множества $U_r[u]$ не превосходит $2r$.

Обратимся теперь к доказательству леммы. Предположим, что $v\in\overline{R[U_r[x]]}$. Будет показано, что $v\in$ $\in R[U_{r+e}[x]]$, на чем доказательство и закончится. Положим $A_0=U_r[x]$ и построим по индукции для каждого целого $n>0$ подмножество A_n множества X такое, что $v\in\overline{R[A_n]}$, $A_n\cap A_{n+1}$ не пусто и диаметр множества A_n меньше, чем $e\cdot 2^{-n}$. Так как пространство X полно, то в нем существует точка u, произвольная окрестность W которой содержит некоторое A_n (отсюда следует, что $v\in\overline{R[W]}$). Ясно, что $d(x,u)<r+e$. Каковы бы ни были окрестность W точки u и окрестность Z точки v, множество $R[W]$ пересекается с множеством Z. Следовательно, существует такой элемент $(u', v')\in R$, что $u'\in W$ и $v'\in Z$; заключение можно выразить иначе, сказав, что множество $R\cap(W\times Z)$ не пусто. Так как множество R замкнуто, то $(u, v)\in R$. Доказательство проведено полностью.

Пусть теперь f — равномерно открытое непрерывное отображение, X — полное псевдометризуемое пространство, Y — хаусдорфово равномерное пространство и Y^* — хаусдорфово пополнение пространства Y. Тогда f (график отображения f) является замкнутым подмножеством произведения $X\times Y^*$ в силу непрерывности f. Так как отображение $f\colon X\to Y$ равномерно открыто, то выполняется условие предыдущей леммы. Применяя ее, заключаем, что отображение $f\colon X\to Y^*$ равномерно открыто. Наконец, так как $f[X]\supset V[f[X]]$ для некоторого V из $\mathfrak{B}$, то множество $f[X]$ непременно должно быть замкнуто (и открыто) в пространстве Y^*. Значит, $f[X]$ — полное пространство.

37. Следствие. *Пусть f — непрерывное равномерно открытое отображение полного псевдометризуемого пространства в хаусдорфово равномерное пространство. Тогда значения отображения f образуют полное подпространство.*