ЗАДАЧИ

А. Упражнение на замкнутые отношения

Пусть X и Y — топологические пространства, R — замкнутое подмножество произведения $X \times Y$. Если A — бикомпактное подмножество пространства X, то $R[A]$ — замкнутое подмножество пространства Y. (Если $y \notin R[A]$, то $A \times \{y\}$ содержится в открытом множестве $(X \times Y) \setminus R$. Теперь можно применить теорему 5.12.)

Б. Упражнение на произведение двух равномерных пространств

Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(Y, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства; для каждого U из $\mathfrak{U}$ и каждого V из $\mathfrak{V}$ положим $W(U, V) = \{((x, y), (u, v)) : (x, u) \in U \text{ и } (y, v) \in V\}$.

(а) Семейство всех множеств вида $W(U, V)$ образует базу равномерности произведения на $X \times Y$.

(б) Пусть R — любое подмножество произведения $X \times Y$. Тогда $W(U, V)[R] = V \circ R \circ U^{-1} = \bigcup \{U[x] \times V[y] : (x, y) \in R\}$.

(в) Замыкание подмножества R произведения $X \times Y$ есть $\bigcap \{V \circ R \circ U^{-1} : U \in \mathfrak{U} \text{ и } V \in \mathfrak{V}\}$.

В. Дискретное неметризуемое равномерное пространство

Следует иметь в виду, что равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ может быть не метризуемо, в то время как топология, порожденная $\mathfrak{U}$, метризуема. Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа Ω. Для каждого $a \in \Omega_0$ положим $U_a = \{(x, y) : x = y \text{ или } x \leqslant a \text{ и } y \leqslant a\}$. Семейство всех множеств вида U_a является базой некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на) Ω_a (заметим, что $U_a = U_a \circ U_a = U_a^{-1}$). Этой равномерности соответствует дискретная, а значит, метризуемая топология, хотя равномерное пространство $(\Omega_0, \mathfrak{U})$ и не метризуемо.

Г. Упражнение: равномерные пространства с базой, образующей гнездо

Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — хаусдорфово равномерное пространство. Предположим, что равномерность $\mathfrak{U}$ обладает базой, линейно упорядоченной отношением включения. Тогда либо пространство $(X, \mathfrak{U})$ метризуемо, либо пересечение каждого счетного семейства открытых в X множеств открыто.

Д. Пример: очень неполное пространство

Пусть Ω_0 — множество всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа Ω, и $\mathfrak{J}$ — порядковая топология на Ω_0. Существует только одна равномерность на Ω_0, индуцирующая топологию $\mathfrak{J}$, причем пространство Ω_0 не полно относительно этой равномерности. (Пользуясь приемами из задачи 4. Д, покажите, что если U — открытое в произведении $\Omega_0 \times \Omega_0$ множество, содержащее диагональ, то существует такой элемент $x \in \Omega_0$, что $(y, z) \in U$ при $y > x$ и $z > x$. Покажите затем, что равномерность, порождающая топологию $\mathfrak{J}$, должна совпадать с равномерностью, индуцированной из бикомпактного пространства $\Omega'=\{x : x \leqslant \Omega\}$.)

Замечание. Указанное свойство было замечено Дьедонне [2]. Досс [1] охарактеризовал топологические пространства, которые, подобно Ω_0, имеют лишь одну равномерность.

Е. Теорема о предбазах для вполне ограниченных пространств

Аналог теоремы 5.6 Александера, характеризующей бикомпактные пространства в терминах предбаз, для равномерных пространств формулируется так. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство, причем для каждого элемента U некоторой предбазы равномерности $\mathfrak{U}$ существует такое конечное покрытие $A_1, \ldots, A_n$ пространства X, что $A_i \times A_i \subset U$ при каждом i. Тогда пространство $(X, \mathfrak{U})$ вполне ограничено.

Следовательно, произведение равномерных пространств вполне ограничено в том и только в том случае, когда каждое координатное пространство вполне ограничено.

Из предшествующего утверждения и теоремы 6.32 можно вывести теорему А. Н. Тихонова о произведении (5.13) для случая, когда все сомножители — вполне регулярные пространства.

Ж. Некоторые экстремальные равномерности

(а) Если $(X, \mathfrak{J})$ — тихоновское пространство, то равномерность, индуцированная на X равномерностью бикомпактного расширения Стоуна — Чеха пространства X, является наименьшей из всех равномерностей, относительно которых равномерно непрерывна каждая непрерывная на X ограниченная вещественная функция.

(б) Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — вполне регулярное пространство. Тогда среди равномерностей на X, порождающих топологию $\mathfrak{J}$, существует наибольшая равномерность $\mathfrak{V}$. Эту равномерность можно описать иначе — как наименьшую из тех, которые делают равномерно непрерывным каждое непрерывное отображение пространства $(X, \mathfrak{J})$ в произвольное метрическое, или в произвольное равномерное, пространство. А именно, $V \in \mathfrak{V}$ в том и лишь в том случае, когда множество V является окрестностью диагонали в произведении $X \times X$ и существует такая последовательность $\{V_n, n \in \omega\}$ симметричных окрестностей диагонали, что $V_0 \subset V$ и $V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n$ прн каждом n из ω.

Замечание. Эти два построения иллюстрируют метод, уже применявшийся раньше. Пусть F — произвольное семейство определенных на множестве X отображений; элемент $f \in F$ отображает пространство X в равномерное пространство Y_f. Тогда существует наименьшая равномерность на X, относительно которой все эти отображения равномерно непрерывны (или, что эквивалентно, равномерно непрерывно естественное отображение пространства X в произведение $\prod \{Y_f : f \in F\}$).

Дальнейшие сведения об экстремальных равномерностях можно почерпнуть из работы Широта [1].

З. Равномерные системы окрестностей

В понятие *равномерной системы окрестностей* на множестве X входят соответствие V и упорядочение $\geqslant$, подчиненные следующим ограничениям:

1) множество $V_a(x)$ содержит точку x и само содержится в множестве X для каждого элемента a множества индексов A и любой точки x из X;

2) множество индексов A направлено отношением $\geqslant$;

3) если $a \geqslant b$, то $V_a(x) \subset V_b(x)$ для всех x;

4) для каждого элемента a множества A существует такой элемент $b \in A$, что $y \in V_a(x)$, если $x \in V_b(y)$;

5) для каждого элемента a множества A существует такой элемент $b \in A$, что $z \in V_a(x)$, если $y \in V_b(x)$ и $z \in V_b(y)$.

(а) Если $(V, \geqslant)$ — равномерная система окрестностей на X, то семейство всех множеств вида $\{(x, y) : y \in V_a(x)\}$, где a — любой элемент из A, образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на множестве X. Эта равномерность называется *равномерностью, соответствующей заданной равномерной системе окрестностей*. Она обладает следующим свойством: для каждого $a \in A$ найдется такое $U \in \mathfrak{U}$, что $U[x] \subset V_a(x)$ при всех $x \in X$, и для каждого U из $\mathfrak{U}$ найдется такой элемент $a \in A$, что $V_a(x) \subset U[x]$ при всех $x \in X$.

(б) Пусть $\mathfrak{U}$ — некоторая равномерность на X. Положим $V_U(x) = U[x]$ для каждого элемента U равномерности $\mathfrak{U}$ и произвольной точки x множества X. Множество $\mathfrak{U}$ направлено отношением включения $\subset$. Тогда $(V, \subset)$ — равномерная система окрестностей на множестве X; соответствующая ей равномерность совпадает с $\mathfrak{U}$.

(в) Пусть P — комплект псевдометрик равномерности $\mathfrak{U}$, заданной на множестве X, и A — декартово произведение множества P и множества положительных вещественных чисел. Направим множество A, согласившись, что $(q, s) \geqslant (p, r)$ тогда и только тогда, когда $s \leqslant r$ и $q(x, y) \geqslant p(x, y)$ для всех точек x и y множества X. Положим $V_{p,r}(x) = \{y : p(x, y) < r\}$. Тогда $(V, \geqslant)$ — равномерная система окрестностей на X и $\mathfrak{U}$ — соответствующая ей равномерность.

Замечание. После всего сказанного выше очевидно, что в основу концепций равномерной топологии можно было бы положить «снабженные индексами» системы окрестностей; при этом получилась бы теория, эквивалентная теории равномерных пространств.

И. «Отклонения» и метрики

«Отклонением» на множестве X называется неотрицательная вещественная функция e, определенная на множестве $X \times X$ и удовлетворяющая условиям:

1) $e(x, y) = 0$ в том и только в том случае, когда $x = y$, и

2) для каждого положительного числа s существует такое положительное число r, что если $e(x, y)$ и $e(y, z)$ меньше r, то $e(x, z) < s$.

Для любого отклонения e на X существует такая неотрицательная функция p на множестве $X \times X$, что выполняются условия:

1) $p(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $p(x, y) + p(y, z) \geqslant p(x, z)$ для всех x, y и z из X;

3) для каждого положительного числа s существует такое положительное число r, что если $e(x, y) < r$, то $p(x, y) < s$, и если $p(x, y) < r$, то $e(x, y) < s$.

Если $e(x, y) = e(y, x)$ для всех x и y, то от функции p можно потребовать, чтобы она была метрикой.

Замечание. По существу, это — метризационная теорема Читтендена (см. 6.14). «Метризация» топологических пространств посредством функций, удовлетворяющих всем аксиомам метрики, кроме аксиомы симметрии: «$d(x, y) = d(y, x)$», изучалась Рибейро [3] и Баланцатом [1].

Термин «отклонение» некоторыми авторами употреблялся для обозначения расстояния со значениями в более общих структурах, чем вещественные числа (например, в частично упорядоченном множестве). О подходе к равномерной топологии на этой основе можно узнать из работ Апперта [1], Гомеса [1], Калиша [1], Колме [1], Л. Коэна и Гофмана [1] и Ласаля [1].

К. Системы равномерных покрытий

Пусть Φ — семейство покрытий множества X такое, что:

1) для любых покрытий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ из системы Φ найдется покрытие в Φ, вписанное и в $\mathfrak{A}$, и в $\mathfrak{B}$;

2) если $\mathfrak{A} \in \Phi$, то в Φ найдется покрытие, звездно вписанное в $\mathfrak{A}$;

3) если $\mathfrak{A}$ — покрытие множества X и некоторое вписанное в $\mathfrak{A}$ покрытие множества X принадлежит семейству Φ, то и $\mathfrak{A}$ входит в Φ.

Пусть $\mathfrak{A}$ — равномерность на X, базой которой служит семейство множеств вида $\bigcup \{A \times A : A \in \mathfrak{A}\}$, где $\mathfrak{A}$ пробегает все Φ. Тогда Φ — семейство всех равномерных покрытий равномерного пространства $(X, \mathfrak{A})$.

Замечание. Описание равномерности в терминах покрытий очень эффективно применялось Тьюки [1]*). Очень рано общая конструкция этого рода была создана П. С. Александровым и Урысоном [1].

Л. Топологически полные метризуемые пространства

Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *метрически топологическим полным* тогда и только тогда, когда существует такая метрика d на множестве X, что (X, d) — полное метрическое пространство, топология которого совпадает с $\mathfrak{J}$. Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *абсолютной* G_δ в том и лишь в том случае, когда оно метризуемо и является множеством типа G_δ (пересечением счетного семейства открытых множеств) в каждом метрическом пространстве, в которое оно топологически вкладывается. Теорема П. С. Александрова [1]: топологическое пространство метрически топологически полно в том и только в том случае, когда оно является абсолютной G_δ.

*) Позднее широкое исследование равномерных пространств на языке семейств покрытий осуществил Ю. М. Смирнов [5], [6] и др. (*Прим. перев.*)

Доказательство распадается в ряд лемм.

(а) Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, U — его открытое подмножество. Для точек $x \in U$ положим $f(x) = \frac{1}{\operatorname{dist}(x, X \setminus U)}$, и пусть $d^*(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$. Тогда d^* — метрика, (U, d^*) — полное метрическое пространство, причем топологии, порожденные метриками d и d^* на множестве U, совпадают.

(б) Множество типа G_δ в полном метрическом пространстве само гомеоморфно некоторому полному метрическому пространству. (Пусть $U = \bigcap \{U_n : n \in \omega\}$: рассмотрите естественное отображение пространства U в произведение полных метрических пространств (U_n, d_n^*), где d_n^* строится по d и U_n так, как указано в (а).)

(в) Если всюду плотное подпространство Y хаусдорфова пространства X можно гомеоморфно отобразить на некоторое полное метрическое пространство Z, то Y является множеством типа G_δ в X. (Обозначим через U_n для каждого целого числа $n > 0$ множество всех точек пространства X, обладающих окрестностью, диаметр образа которой меньше $\frac{1}{n}$. Заданный гомеоморфизм f можно непрерывно продолжить до некоторого непрерывного отображения $\bar{f}$ пространства $\bigcap \{U_n : n \in \omega\}$ в пространство Z; при этом $f^{-1} \circ \bar{f}$ — непременно тождественное отображение.)

М. Топологически полные пространства; униформизуемые пространства

Топологическое пространство $(X, \mathfrak{J})$ называется *топологически полным* тогда и только тогда, когда на X существует такая равномерность $\mathfrak{U}$, что пространство $(X, \mathfrak{U})$ полно и его равномерная топология совпадает с $\mathfrak{J}$.

(а) Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — равномерности на множестве X, причем $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{V}$. Если пространство $(X, \mathfrak{U})$ полно и равномерная топология, порожденная $\mathfrak{U}$, совпадает с равномерной топологией, порожденной $\mathfrak{V}$, то и пространство $(X, \mathfrak{V})$ полно. Следовательно, вполне регулярное пространство топологически полно тогда и только тогда, когда оно полно относительно наибольшей равномерности, совместимой с топологией $\mathfrak{J}$.

(б) Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — полное равномерное пространство, F — множество типа F_σ в нем (счетное объединение замкнутых множеств) и $x \in X \setminus F$. Тогда существует непрерывная вещественная функция на X, положительная на F и равная нулю в x. Следовательно, существуют открытое множество V и равномерность $\mathfrak{V}$ на V такие, что $V \supset F, x \notin V$, пространство $(V, \mathfrak{V})$ полно, и топология, порожденная равномерностью $\mathfrak{V}$, совпадает с топологией, индуцированной на V топологией равномерности $\mathfrak{U}$. (Напоминаем про прием, примененный в задаче 6. Л, (а).)

(в) Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — полное равномерное пространство и Y — его подмножество, являющееся пересечением некоторого семейства множеств типа F_σ. Тогда Y топологически полно в топологии, индуцированной равномерной топологией пространства $(X, \mathfrak{U})$ (см. 6. Л).

(г) Каждое паракомпактное пространство X топологически полно. (Рассмотрим равномерность, образованную всеми окрестностями диагонали. Пусть некоторая направленность Коши в X не сходится ни к какой точке пространства X. Тогда для каждой точки $x \in X$ она с некоторого момента должна находиться в дополнении к некоторой ее окрестности. Пользуясь тем, что произвольное открытое покрытие паракомпактного пространства однообразно, получаем противоречие.)

Замечание. Проблема топологической полноты изучалась Дьедонне [1]. Он показал, в частности, что каждое метризуемое пространство топологически полно (это следует как из (в), так и из (г) — утверждений, приведенных выше). Широта [2] доказал несколько интересных и глубоких теорем о топологической полноте, идущих в направлении работы Хьюитта [2]. См. также статью Умегаки [1]*).

Вполне регулярное пространство X может не быть паракомпактным и тем не менее удовлетворять следующим двум условиям:

1) семейство всех окрестностей диагонали является равномерностью;

2) X — топологически полное пространство **).

Непаракомпактное пространство, удовлетворяющее условию 1), описано в задаче 6. Д. Из свойства 1) вытекает нормальность. (Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся множества. Выберем симметричное множество U так, чтобы было $U \circ U \subset (X \setminus A) \times (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \times (X \setminus B)$, и рассмотрим множества $U[A]$ и $U[B]$. Похожим рассуждением можно доказать более сильное свойство нормальности, как показал Г. Коэн в [1].) В то же время произведение несчетного множества экземпляров пространства вещественных чисел полно и не нормально (А. Стоун [1]).

Сформулированное в пункте (в) F_σ-условие подсказано статьей Смирнова [4] о нормальных пространствах.

Н. Рассуждения, связанные с дискретными подпространствами; счетная компактность

(а) Если подмножество A равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ не вполне ограничено, то существуют $U \in \mathfrak{U}$ и бесконечное подмножество B множества A такие, что $U[x]$ не пересекается с $U[y]$ для любых двух различных точек x и y множества B. Эквивалентное условие: в комплекте равномерности $\mathfrak{U}$ существует такая псевдометрика d, что $d(x, y) \geqslant 1$ для любых различных точек x и y множества B. (Множества, подобные B, можно было бы назвать равномерно дискретными.)

(б) Подмножество A топологического пространства $(X, \mathfrak{J})$ называется *относительно счетно компактным* тогда и только тогда,

---

*) Существует иная концепция топологической полноты, развитая Чехом: тихоновское пространство полно, если оно является множеством типа G_δ в некотором содержащем его бикомпакте. Это — тоже обобщение метрической полноты. (*Прим. перев.*)

**) Это доказал Исаак Намиока.

когда каждая последовательность точек множества A обладает предельной точкой в X. Каждое относительно счетно компактное подмножество вполне регулярного пространства $(X, \mathfrak{J})$ вполне ограничено в наибольшей равномерности, совместимой с $\mathfrak{J}$. В топологически полном пространстве $(X, \mathfrak{J})$ подмножество относительно счетно компактно тогда и только тогда, когда его замыкание бикомпактно, а замкнутое подмножество бикомпактно в том и только в том случае, когда оно счетно компактно.

О. Инвариантные метрики

Псевдометрика p, заданная на множестве X, называется *инвариантной* относительно некоторого семейства F взаимно однозначных отображений множества X на себя, или просто *F-инвариантной*, тогда и только тогда, когда $p(x, y) = p(f(x), f(y))$ для всех x и y из X и всех f из F.

Элемент U равномерности $\mathfrak{U}$, заданной на X, называется *F-инвариантным*, если $(x, y) \in U$ эквивалентно $(f(x), f(y)) \in U$, при всех f из F. Тогда семейство всех F-инвариантных псевдометрик, равномерно непрерывных на $X \times X$, порождает равномерность $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда семейство всех F-инвариантных элементов равномерности $\mathfrak{U}$ образует ее базу (см. 6.12).

Замечание. Это — непосредственное обобщение метризационной теоремы для топологических групп, формулируемой в следующем упражнении.

П. Топологические группы: равномерности и метризация

Пусть $(G, \mathfrak{J})$ — топологическая группа. Для каждой окрестности U единицы положим $U_L = \{(x, y) : x^{-1}y \in U\}$ и $U_R = \{(x, y) : xy^{-1} \in U\}$. Рассмотрим следующие равномерности на G: *левую равномерность* $\mathfrak{L}$ — ее базой служит семейство всех множеств U_L, где U — любая окрестность единицы, *правую равномерность* $\mathfrak{R}$, база которой состоит из всех U_R, и *двустороннюю равномерность* $\mathfrak{U}$, предбазой которой является семейство $\mathfrak{L} \cup \mathfrak{R}$.

(а) Топология $\mathfrak{J}$ порождается любой из равномерностей $\mathfrak{L}, \mathfrak{R}, \mathfrak{U}$.

(б) Равномерность $\mathfrak{L}$ (соответственно $\mathfrak{R}$) порождается семейством всех левоинвариантных (правоинвариантных) псевдометрик, непрерывных на $G \times G$ (см. 6. О).

(в) Пусть I — семейство всех окрестностей единицы группы G, инвариантных относительно внутренних автоморфизмов. Семейство I является базой системы окрестностей элемента e тогда и только тогда, когда совокупность всех псевдометрик, лево- и правоинвариантных одновременно, а также непрерывных на $G \times G$, порождает равномерность, топология которой совпадает с $\mathfrak{J}$. (Если U — инвариантная окрестность единицы e, то множество $U_L = U_R$ инвариантно относительно левых и правых переносов одновременно. Если псевдометрика p лево- и правоинвариантна, то $p(e, y) = p(x^{-1}ex, x^{-1}yx)$.)

(г) Пусть G — множество всех вещественных функций вида $g(x) = ax + b$, где $a \neq 0$. Оно образует группу по отношению к операции композиции. Группу G можно топологизовать, согласившись, что g лежит близко к единице тогда и только тогда, когда a близко к единице, а $|b|$ близко к нулю. Для этой группы $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{R}$; для нее не существует двусторонне инвариантной метрики. (То, что $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{R}$, устанавливается непосредственным наблюдением определяющих баз. Чтобы убедиться, что не существует инвариантной метрики, покажите, что при каждом g и $a \neq 1$ существует $f \in G$, для которого свободный член функции $f^{-1} \circ g \circ f$ как угодно велик.)

Замечание. Пользуясь изложенными выше соображениями, можно доказать, что лево- и правоинвариантные метрики на G существуют в том и только в том случае, когда у системы окрестностей единицы e есть счетная база (Биркгоф [1] и Какутани [1]). Специальная теорема о двусторонне инвариантной метрике принадлежит Кли [1].

Следует отметить, что метризуемость топологической группы двусторонне инвариантной метрикой является очень сильным условием. В частности, на каждой локально бикомпактной группе с этим свойством существует мера Хаара, инвариантная относительно левых и правых переносов *).

P. Почти открытые подмножества топологической группы

Говорят, что подмножество A топологического пространства X является *почти открытым* в X, или что оно удовлетворяет *условию Бэра*, тогда и только тогда, когда существует такое худое множество B, что симметрическая разность $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ открыта.

(а) Множество A почти открыто в X в том и лишь в том случае, когда существуют худые множества B и C, для которых множество $(A \setminus B) \cup C$ открыто. Счетные объединения почти открытых множеств и дополнения до почти открытых множеств почти открыты. Каждое борелевское множество почти открыто. (Семейство борелевских множеств является наименьшим семейством, содержащим все открытые множества и замкнутым относительно перехода к дополнениям и счетным объединениям **).)

(б) Теорема Банаха — Куратовского — Петтиса. Если множество A содержит нехудое почти открытое подмножество топологической группы X, то AA^{-1} — окрестность единичного элемента (Если множество A нехудое, то и все X нехудое. Так как X — топологическая группа, то каждое непустое открытое подмножество пространства X тоже является нехудым. Для каждого почти открытого подмножества B пространства X обозначим через B^* объединение всех открытых множеств U, для которых $U \cap (X \setminus B)$ — худое множество. Тогда $(xB)^* = xB^*$ и $(B \cap C)^* = B^* \cap C^*$, если C — тоже почти открытое множество. Значит, $xA^* \cap A^* = (xA \cap A)^*$ и,

---

*) М. И. Граевым (УМН 5, № 2 (36) (1950), 3—56) разобран простой пример локально бикомпактной группы со счетной базой, на которой нет двусторонне инвариантной непрерывной метрики. (*Прим. перев.*)

**) Последнее условие означает, что дополнение к множеству принадлежит семейству и объединение любого счетного множества элементов семейства снова является его элементом. (*Прим. перев.*)

если $xA^* \cap A^*$ не пусто, то и $xA \cap A$ не пусто. Тогда $A^*(A^*)^{-1} = \{x : xA^* \cap A^* \text{ не пусто}\} \subset \{x : xA \cap A \text{ не пусто}\} = AA^{-1}$.)

(в) Почти открытая подгруппа нехудой топологической группы X либо является худым множеством в X, либо открыта и замкнута в X.

(г) Требование почти открытости в формулировке утверждения (в) нельзя опустить. Существует подгруппа Y группы вещественных чисел X, для которой фактор-группа X/Y бесконечна и счетна. Так как для каждого $Z \in X/Y$ имеется гомеоморфизм пространства X на себя, отображающий множество Y на множество Z, то множество Y нехудое в X. (Пусть B — базис Гамеля пространства X относительно рациональных чисел, C — счетное бесконечное подмножество множества B и Y — множество всех конечных линейных комбинаций элементов из $B \setminus C$.)

Замечание. Историческую справку и ссылки, относящиеся к теореме (б), можно найти в статье Петтиса [1]. Конструкция, описанная в (г), проходит не только для вещественных чисел, но и в гораздо более широких предположениях. Основная идея принадлежит Хаусдорфу. Самые сильные результаты этого направления изложены в работе Петтиса [1]; в последней также сообщается история и даются дальнейшие ссылки.

C. Пополнение топологических групп

Пусть $(G; \mathfrak{J})$ — топологическая группа, $\mathfrak{L}$ — ее левая равномерность, $\mathfrak{R}$ — ее правая равномерность и $\mathfrak{U}$ — двусторонняя равномерность ($\mathfrak{U}$ — наименьшая равномерность, бо́льшая и $\mathfrak{L}$, и $\mathfrak{R}$). Отмечалась, что $\mathfrak{J}$ является равномерной топологией каждой из равномерностей $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{U}$.

(а) Пространство $(G, \mathfrak{L})$ полно тогда и только тогда, когда полно пространство $(G, \mathfrak{R})$. Направленность в G является направленностью Коши относительно равномерности $\mathfrak{U}$ в том и только в том случае, когда она является направленностью Коши и по отношению к $\mathfrak{R}$, и по отношению к $\mathfrak{L}$. Если $(G, \mathfrak{L})$ полно, то и $(G, \mathfrak{U})$ полно. Равномерное пространство $(G, \mathfrak{L})$ будет полным, если $(G, \mathfrak{U})$ полно и группа G обладает следующим свойством: коль скоро $\{x_n, n \in D\}$ является направленностью Коши по отношению к $\mathfrak{L}$, то и $\{(x_n)^{-1}, n \in D\}$ — тоже направленность Коши по отношению к $\mathfrak{L}$. (Последнее равносильно требованию, чтобы у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ были одни и те же направленности Коши.) Левый перенос на фиксированный элемент группы G $\mathfrak{L}$-равномерно непрерывен, правый перенос $\mathfrak{R}$-равномерно непрерывен, а инверсия (отображение x в x^{-1}) $\mathfrak{U}$-равномерно непрерывна. Умножение (пара (x, y) переходит в элемент xy), как правило, не бывает равномерно непрерывно.

(б) Теорема. *Пусть $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — хаусдорфова топологическая группа, $(H, \mathfrak{V})$ — хаусдорфово пополнение равномерного пространства $(G, \mathfrak{U})$ и $\mathfrak{S}$ — равномерная топология равномерности $\mathfrak{V}$. В этом случае групповую операцию можно единственным образом продолжить на H так, что $(H, \cdot, \mathfrak{S})$ станет топологической группой с двусторонней равномерностью $\mathfrak{V}$.*

(в) Описанная в предыдущей теореме топологическая группа H будет пополнением рассматриваемой группы по правой равномерности, если направленности Коши у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ одни и те же. Но в силу сказанного в пункте (а) последнее условие необходимо для существования «правого пополнения». Оно не всегда выполняется. Например, пусть G — группа всех гомеоморфизмов замкнутого единичного интервала $[0, 1]$ на себя с композицией в качестве групповой операции и с топологией (правоинвариантной) метрики: $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$. В G существует последовательность $\{f_n, n \in \omega\}$, равномерно сходящаяся к не взаимно однозначному отображению отрезка. Тогда последовательность $\{(f_n)^{-1}, n \in \omega\}$ не удовлетворяет условию Коши относительно левой равномерности. Группа G в двусторонней равномерности $\mathfrak{U}$ уже полна, ибо $\mathfrak{U}$ — равномерность, порожденная метрикой $d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$.

(г) Теорема. *Пусть $(G, \cdot, \mathfrak{J})$ — метризуемая топологическая группа, d — метризующая ее правоинвариантная метрика и $d^*(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$. В этом случае двусторонняя равномерность $\mathfrak{U}$ совпадает с равномерностью, порожденной метрикой d^*. Равномерное пространство $(G, \mathfrak{U})$ полно тогда и только тогда, когда пространство G полно в какой-нибудь метрике, порождающей топологию $\mathfrak{J}$.* (Равносильное утверждение: тогда и только тогда, когда G является множеством типа G_δ в каждом топологически содержащем его метризуемом пространстве.) *Если у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{R}$ одни и те же последовательности Коши, и G полно в некоторой метрике, порождающей топологию $\mathfrak{J}$, то G полно относительно каждой правоинвариантной метрики, совместимой с $\mathfrak{J}$* (см. 6. Л и 6. Р).

Замечание. Есть два важных специальных случая, когда «правое пополнение» достижимо. Если у единичного элемента группы есть вполне ограниченная окрестность или если инверсия (отображение, переводящее x в x^{-1}) равномерно непрерывна на некоторой окрестности единицы, то каждая правая направленность Коши является также и левой направленностью Коши и двустороннее пополнение дает также и правое пополнение. Эти результаты доказываются без большого труда непосредственно; они есть в книгах Бурбаки [1] и Вейля [2]. Пример (в) принадлежит Дьедонне [5], а утверждение (г) принадлежит Кли [1].

Часть утверждения (г) — вывод о полноте на основании метрической топологической полноты — нельзя распространить на неметризуемые группы (см. 7. Н).

Т. Непрерывность и открытость гомоморфизмов; теорема о замкнутом графике

На всем протяжении этого упражнения G и H будут хаусдорфовыми топологическими группами, $\mathfrak{U}$ будет обозначать семейство всех окрестностей единицы в G, $\mathfrak{B}$ будет обозначать соответствующее семейство в H.

(а) Теорема о замкнутом графике. *Пусть G — топологическая группа, H — метризуемая топологическая группа, полная относительно правой равномерности, и f — такой гомоморфизм группы G в группу H, что:*

1) *график отображения f является множеством, замкнутым в $G \times H$, и*

2) *замыкание множества* $f^{-1}[V]$ *принадлежит семейству* $\mathfrak{U}$, *если* $V \in \mathfrak{V}$.

Тогда отображение f *непрерывно.*

Двойственное утверждение: гомоморфизм g группы H в группу G открыт, если:

1*) график отображения g является множеством, замкнутым в $H \times G$,

2*) замыкание множества $g[V]$ принадлежит $\mathfrak{U}$, если $V \in \mathfrak{V}$.

(Доказывается эта теорема применением леммы 6.36 к отношениям f^{-1} и g. Воспользуйтесь правоинвариантной метрикой на H. Пространство H полно относительно любой метризующей его правоинвариантной метрики.)

(б) Если в посылки предшествующей теоремы включить предположения о том, что H — линделёфово пространство (т. е. что каждое открытое покрытие пространства H содержит счетное подпокрытие) и что G — нехудое пространство, то условие 2) будет выполняться автоматически. Если, кроме того, $g[H]=G$, то условие 2*) тоже будет выполняться автоматически. Если G и H — линейные топологические пространства, f и g — линейные отображения, $g[H]=G$ и пространство G — нехудое, то непременно выполняются условия 2) и 2*). (Пусть $V \in \mathfrak{V}$, тогда $\overline{f[G]} \subset Vf[G]$ и, если H — линделёфово пространство, то $f[G]$ покрывается счетным семейством множеств, каждое из которых получается из V посредством переноса на некоторый элемент множества $f[G]$. Замыкания прообразов при f элементов этого семейства попарно гомеоморфны, и их внутренности непременно не пусты, если пространство G нехудое. Следовательно, в множестве $\overline{f^{-1}[V]}$ содержится открытое множество и $\overline{(f^{-1}[V^{-1}V])} \supset \overline{f^{-1}[V^{-1}]f^{-1}[V]} \supset \overline{f^{-1}[V^{-1}]} \cdot \overline{f^{-1}[V]} = \overline{(f^{-1}[V])}^{-1} \cdot \overline{(f^{-1}[V])}$. Отсюда вытекает, что $\overline{f^{-1}[V]} \in \mathfrak{U}$ для каждого V из $\mathfrak{V}$. Аналогичное рассуждение проходит для отображения g. В случае линейного топологического пространства вместо переносов элементов семейства $\mathfrak{V}$ можно прибегнуть к умножению их на числа.)

(в) Теорема о замкнутом графике верна и в случае, когда H — локально бикомпактная топологическая группа: из 1) и 2) вытекает непрерывность; справедливо и двойственное утверждение. (Этот результат проще изложенного выше. Его доказательство базируется на лемме 6. А.)

Замечание. Теорема о замкнутом графике для случая полных нормированных линейных пространств была доказана Банахом [1], стр. 41 Во всех известных вариантах этой теоремы посылки включают сильные ограничения на H типа счетности или компактности. Пример, опровергающий множество заманчивых гипотез, можно построить следующим образом. Пусть G — какое-нибудь бесконечномерное полное нормированное линейное пространство и H — это же линейное пространство G, наделенное топологией, базой которой в нуле служит семейство всех выпуклых множеств, содержащих отрезки каждого направления *). Тождествен-

*) В терминологии Бурбаки множества, удовлетворяющие последнему условию, называются поглощающими. (*Прим. перев.*)

ное отображение g пространства H на пространство G непрерывно и удовлетворяет условиям 1) и 2), сформулированным выше (см. 6. X, (а)).

Пространство H обладает многими хорошими свойствами. Например, оно полно, и для него выполняется теорема 6. X, (а) о равномерной ограниченности. Тем не менее отображение g, очевидно, не открыто.

У. Суммируемость

Пусть f — функция со значениями в полной абелевой хаусдорфовой топологической группе и A — некоторое подмножество ее области определения. Обозначим через $\mathfrak{A}$ семейство всевозможных конечных подмножеств множества A. Для $F \in \mathfrak{A}$ определим S_F как сумму элементов $f(a)$ по всем a из множества F. Семейство $\mathfrak{A}$ направлено отношением $\supset$ и $\{S_F, F \in \mathfrak{A}, \supset\}$ — направленность в G. Если эта направленность сходится к некоторому элементу $s \in G$, то говорят, что функция f *суммируема* по A, а элемент s называют суммой f по A; при этом мы пишем $s = \sum \{f(a) : a \in A\} = \sum_A f$.

(а) Критерий Коши для суммируемости. Функция f суммируема по A тогда и только тогда, когда для каждой окрестности U элемента 0 группы G существует такое конечное подмножество B множества A, что для любого конечного множества $C \subset A \setminus B$ имеет место $\sum_C f \in U$. Следовательно, функция, суммируемая по A, суммируема по каждому подмножеству множества A.

(б) Если f и g суммируемы по A, то $f+g$ (где $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$) тоже суммируема по A, причем $\sum_A (f+g) = \sum_A f + \sum_A g$.

(в) Если f определена и суммируема на A и $\mathfrak{B}$ — любое семейство попарно непересекающихся подмножеств множества A, покрывающее A, то $\sum_A f = \sum \left\{ \sum \{f(b) : b \in B\} : B \in \mathfrak{B} \right\}$. Однако из существования повторной суммы еще нельзя заключить, что f суммируема по A. (См. 2. Ж по поводу специального случая, в котором из существования повторной суммы следует суммируемость по A.)

Ф. Равномерно локально бикомпактные пространства

Равномерное пространство $(X, \mathfrak{U})$ называется *равномерно локально бикомпактным* тогда и только тогда, когда существует такой элемент U равномерности $\mathfrak{U}$, что множество $U[x]$ бикомпактно для каждой точки x из X. В частности, каждая локально бикомпактная топологическая группа равномерно локально бикомпактна относительно ее левой и правой равномерностей.

(а) Пусть $(X, \mathfrak{U})$ — равномерное пространство, U — элемент равномерности $\mathfrak{U}$, $U_0 = U$ и $U_n = U \circ U_{n-1}$ при каждом положительном целом n. Тогда для каждого подмножества A пространства X множество $\bigcup \{U_n[A] : n \in \omega\}$ одновременно открыто и замкнуто.

(б) Пусть U — замкнутая окрестность диагонали в произведении $X \times X$, A — бикомпактное подмножество пространства X и множество $U \circ U[x]$ бикомпактно для каждого x из A. Тогда множество $U[A]$ бикомпактно. (Множество $U[A]$ замкнуто в силу 6. А.)

(в) Каждое связное равномерно локально бикомпактное пространство $(X, \mathfrak{U})$ σ-бикомпактно (т. е. X является объединением счетного семейства бикомпактных подмножеств).

(г) Каждое равномерно локально бикомпактное пространство является объединением семейства попарно непересекающихся открытых σ-бикомпактных подпространств. Значит, каждое такое пространство паракомпактно.

(д) Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — топологическое пространство. Совместимая с топологией $\mathfrak{J}$ равномерность $\mathfrak{U}$, для которой пространство $(X, \mathfrak{U})$ равномерно локально бикомпактно, существует тогда и только тогда, когда пространство $(X, \mathfrak{J})$ локально бикомпактно и паракомпактно (см. 5.28).

Замечание. Утверждение (а) вытекает, по существу, из рассуждения о цепочках, содержащегося в 5. Ф. Можно отметить, что сформулированные в 5. Ф утверждения о компонентах и связных множествах не распространяются на равномерно локально бикомпактные пространства.

Х. Теорема о равномерной ограниченности

(а) Пусть X — вещественное линейное топологическое пространство, нехудое в себе, и K — некоторое замкнутое выпуклое подмножество пространства X, удовлетворяющее условию $K=-K$ и содержащее отрезок каждого направления (т. е. для каждого x из X существует такое положительное t, что $sx \in K$ при $0 \leqslant s \leqslant t$). Тогда K — окрестность нуля. (Покажите, что K — нехудое множество в X. В силу 6 Р отсюда следует, что $K - K$ является окрестностью нуля; пользуясь выпуклостью, заключаем, что $2K$ является окрестностью нуля.)

(б) Теорема. Пусть F — некоторое семейство непрерывных линейных отображений нехудого линейного топологического пространства X в нормированное линейное пространство Y. Предположим, что $\sup\{\|f(x)\| : f \in F\}$ конечен для каждой точки x из X. Тогда для некоторой окрестности U нуля в X имеем, что $\sup\{\|f(x)\| : x \in U$ *и* $f \in F\}$ конечен. (Воспользовавшись предыдущим утверждением, покажите, что если S — единичный шар около нуля в Y, то множество $\bigcap \{f^{-1}[S] : f \in F\}$ является окрестностью нуля в X.)

Замечание. Утверждение (б) — классическая теорема Банаха — Штейнгауза. (Банах [1], стр. 80.) Приведенная формулировка, очевидно, может быть еще обобщена. Основную идею обобщения подсказывает утверждение (а). В терминологии следующей главы заключение теоремы (б) можно было бы сформулировать так: семейство F равностепенно непрерывно в нуле.

Ц. Булевы σ-кольца

Булево кольцо $(B, +, \cdot)$ называется *σ-кольцом* тогда и только тогда, когда каждое его счетное подмножество имеет наименьшую верхнюю грань в естественном упорядочении множества B (см. 2. Л). Вот естественные примеры булевых σ-колец:

1) Кольцо $(\mathfrak{L}, \Delta, \bigcap)$, где $\mathfrak{L}$ — семейство всех измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$, или то же кольцо $\mathfrak{L}$ по модулю семейства $\mathfrak{N}$ всех множеств меры нуль, является σ-кольцом. (Здесь

Δ — симметрическая разность. Семейство $\mathfrak{N}$ является в действительности σ-идеалом в очевидном смысле.)

2) Кольцо $(\mathfrak{A}/\mathfrak{M}, \Delta, \cap)$, где $\mathfrak{A}$ — семейство всех борелевских подмножеств отрезка и $\mathfrak{M}$ — его подсемейство, состоящее из худых борелевских множеств.

В этом упражнении мы хотим установить теорему о представлении типа 2) для произвольного булева σ-кольца. Через $\mathfrak{B}$ всюду будет обозначаться семейство всех бикомпактных открытых подмножеств некоторого локально бикомпактного булева пространства X. Мы ничего не потеряем в общности, если ограничимся кольцами типа $(\mathfrak{B}, \Delta, \cap)$. (См. теорему Стоуна о представлении, 5. У.)

(а) Если $(\mathfrak{B}, \Delta, \cap)$ — булево σ-кольцо, то замыкание объединения счетного множества элементов семейства $\mathfrak{B}$ снова является элементом $\mathfrak{B}$ (т. е. замыкание объединения счетного семейства открытых бикомпактных подмножеств пространства X бикомпактно и открыто).

(б) Пусть $\mathfrak{A}$ — наименьшее объемлющее $\mathfrak{B}$ семейство подмножеств пространства X, содержащее вместе с любым счетным набором своих элементов их объединение и вместе с любыми двумя элементами их симметрическую разность. Обозначим через $\mathfrak{M}$ семейство всех худых подмножеств пространства X. Тогда для каждого элемента A семейства $\mathfrak{A}$ существует единственный элемент B семейства $\mathfrak{B}$ такой, что $A \Delta B \in \mathfrak{M}$ (см. задачу 6. Р, (а)).

(в) Теорема. *Определенное выше σ-кольцо $\mathfrak{A}$ является прямой суммой кольца $\mathfrak{B}$ и σ-идеала $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ изоморфно булеву σ-кольцу $\mathfrak{A}$ по модулю σ-идеала $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}$.*

Замечание. Результаты этого упражнения принадлежат Люмису [1]. Пространства, в которых замыкание каждого открытого множества открыто (такие, как стоуновское пространство булева σ-кольца, удовлетворяющее условию Суслина — см. задачу 1.О), иногда называют экстремально несвязными *). Пространство всех вещественных ограниченных борелевских функций на бикомпактных пространствах этого типа разлагается по аналогии с фактом, изложенным в пункте (в), на пространство непрерывных функций и пространство функций, равных нулю вне худого множества. По поводу этого и других результатов см. статью М. Стоуна [4], а также статью Диксмье [1].

---

*) Экстремально несвязные тихоновские пространства весьма замечательны. Они являются проективными объектами в категории тихоновских топологических пространств и их совершенных неприводимых отображений. Если пространство отделимой бикомпактной группы экстремально несвязно, то оно конечно. В экстремально несвязных пространствах не существует нетривиальных сходящихся последовательностей. (Отображение $f: X \to Y$ совершенно и неприводимо, если оно непрерывно, замкнуто, прообразы всех точек бикомпактны и не существует замкнутого в X множества X', отличного от X, для которого $fX' = Y$.) Читайте прежде всего: Глисон [1] и Пономарев [3], [6], [7]. (*Прим. перев.*)