*Глава 7*

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА (ПРОСТРАНСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ)

Эта глава посвящена функциональным пространствам. Элементами функциональных пространств служат функции, определенные на фиксированном множестве $X$ со значениями в фиксированном топологическом или равномерном пространстве $Y$. Почти всюду речь идет о функциях, непрерывных относительно некоторой топологии на $X$. Вкратце, наша цель состоит в том, чтобы определить топологии и равномерности на множествах непрерывных функций и выяснить свойства типа компактности, полноты и непрерывности получившихся пространств.

У большинства результатов этой главы есть прототипы в классической теории функций действительной переменной. Однако теоремы о совместной непрерывности и бикомпактно открытой топологии относятся к недавнему времени. Они по преимуществу принадлежат Фоксу [1]. Дальнейшие сведения о пространствах отображений можно найти в работах Аренса [1], Бурбаки [1], Майерса [1] и Тьюки [1].

## ПОТОЧЕЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Один тип топологии функциональных пространств нами исследован уже довольно широко. Если $F$ — семейство отображений множества $X$ в топологическое пространство $Y$, то $F$ содержится в произведении $Y^X = \Pi\{Y : x \in X\}$. Топология $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости (покоординатной сходимости, простой сходимости), или просто *поточечная топология* на $F$, — это топология, индуцированная топологией произведения. Направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к $g$ тогда и только тогда, когда направленность $\{f_n(x),\ n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом $x$ из $X$ (см. 3.4). Предбазу топологии $\mathfrak{P}$ образует семейство всех подмножеств вида $\{f : f(x) \in U\}$, где $x$ — произвольная точка из $X$ и $U$ — любое множество, открытое в $X$. Для каждой точки $x \in X$ определено отображение $e_x$ множества $F$, называемое вычислением в точке $x$ (или проектированием в $x$-е координатное пространство), описываемое формулой $e_x(f) = f(x)$ при всех $f$ из $F$. Вычисление в $x$ непрерывно (и открыто, если $F = Y^*$) по отношению к $\mathfrak{P}$ (теорема 3.2), и $\mathfrak{P}$ — наименьшая топология на $F$, относительно которой каждое отображение вычисления непрерывно. Отображение $g$ топологического пространства в множество $F$ непрерывно относительно топологии $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда $e_x \circ g$ непрерывно для каждой точки $x$ из $X$ (теорема 3.3). Поточечная топология зависит только от рассматриваемого семейства отображений и от топологии, заданной на множестве $Y$. Топология на $X$, если она там и имеется, не влияет на определения и теоремы. Если $Y$ — хаусдорфово или регулярное пространство, то пространство $F$ обладает тем же свойством (3.5 и 4.A), но, вообще говоря, пространство $Y$ может быть локально бикомпактным или удовлетворять первой, либо второй, аксиоме счетности без того, чтобы пространство $F$ обладало теми же свойствами (3.6 и 5.19).

Описание функциональных пространств, бикомпактных в поточечной топологии, немедленно вытекает из теоремы Тихонова (5.13) о произведении бикомпактных пространств. Прежде чем сформулировать результат, в целях удобства согласимся называть семейство $F$ отображений множества $X$ в топологическое пространство $Y$ *поточечно замкнутым* тогда и только тогда, когда $F$ является замкнутым подмножеством пространства произведения $Y^X$. Если $A$ — подмножество множества $X$, то $f[A]$ определяется как множество всех точек $f(x)$, где $x \in A$ и $f \in F$. В случае $x \in X$ запись $F[\{x\}]$ сокращается до $F[x]$. Если $e_x$ — вычисление в $x$, то, очевидно, $e_x[F] = F[x]$.

**1.** Теорема. *Для того чтобы семейство $F$ отображений множества $X$ в топологическое пространство $Y$ было бикомпактно относительно топологии поточечной сходимости, достаточно, чтобы выполнялись условия:*

(а) *семейство $F$ поточечно замкнуто в $Y^X$;*

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки $x \in X$.*

*Если $Y$ — хаусдорфово пространство, то условия* (а) *и* (б) *также и необходимы.*

Доказательство. Семейство $F$ содержится не только в $Y^X$, но и в $\Pi\{\overline{F[x]} : x \in X\}$. Если условие (б) выполняется, то последнее множество является бикомпактным подмножеством произведения $Y^X$ в силу теоремы Тихонова о произведении. Если $F$ поточечно замкнуто, то $F$ бикомпактно. Достаточность условий (а) и (б) тем самым доказана. Если $Y$ — хаусдорфово пространство и множество $F$ бикомпактно в топологии поточечной сходимости, то $F$ замкнуто в силу теоремы 5.7. Множество $F[x]$ бикомпактно и замкнуто, ибо вычисление в произвольной точке $x$ является непрерывным отображением пространства $F$ в хаусдорфово пространство $Y$.

Предшествующая теорема важнее, чем можно было бы думать на основании одних лишь ее применений к изучению топологии поточечной сходимости. Топология поточечной сходимости во многих отношениях неестественна. Например, пусть $X$ — множество; для каждого его конечного подмножества $A$ обозначим через $C_A$ характеристическую функцию множества $A$ (т. е. $C_A(x) = 1$ при $x \in A$ и $C_A(x) = 0$ при $x \notin A$). Семейство $\mathfrak{A}$ всех конечных подмножеств множества $X$ направлено отношением $\supset$, следовательно, $\{C_A, A \in \mathfrak{A}\}$ — некоторая направленность отображений множества $X$ в замкнутый единичный интервал. Эта направленность сходится к отображению $e$, тождественно равному единице, ибо $\{x\} \in \mathfrak{A}$ для каждой точки $x$, и если $A \supset \{x\}$, то $C_A(x) = 1$. Ясно, что топология, при которой характеристическая функция конечного множества оказывается лежащей «близко» к единичной характеристической функции, для многих целей неудобна. Интереснее топологии, сходимость относительно которых подчинена более сильным ограничениям, т. е. бо́льшие топологии. Но заметьте: если пространство $(F, \mathfrak{I})$ бикомпактно и топология $\mathfrak{I}$ больше, чем топология $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости, то тождественное отображение $i$ пространства $(F, \mathfrak{I})$ на пространство

$(F, \mathfrak{P})$ непрерывно, и если $(F, \mathfrak{P})$ — хаусдорфово пространство. то $i$ — непременно гомеоморфизм. Следовательно, если $(F, \mathfrak{J})$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, причем $\mathfrak{J}$ больше, чем топология поточечной сходимости, то $\mathfrak{J}$ совпадает с последней. Это простое замечание указывает стандартный путь доказательства бикомпактности функционального пространства $F$ относительно топологии $\mathfrak{J}$. Сначала показывают, что $F$ бикомпактно относительно топологии поточечной сходимости, и доказывают затем, что из $\mathfrak{P}$-сходимости направленности в $F$ следует ее $\mathfrak{J}$-сходимость. Если $Y$ — хаусдорфово пространство, то мы ничего не потеряем в общности, если ограничимся проверкой этих двух условий, ибо если не выполняется хоть одно из них, то пространство $F$ в топологии $\mathfrak{J}$ не бикомпактно.

Иногда оказывается удобным рассматривать поточечную сходимость на точках из некоторого подмножества области определения функций. Пусть $F$ — некоторое семейство отображений множества $X$ в топологическое пространство $Y$ и $A$ — подмножество множества $X$. Существует естественное отображение $R$ пространства $F$ в пространство произведения $Y^A$, получающееся посредством сужения каждого $f \in F$ на множество $A$, т. е. $R(f) = f|A$ для каждого $f$ из $F$. Наименьшая топология $\mathfrak{P}_A$ на множестве $F$, относительно которой отображение $R$ непрерывно, состоит, очевидно, из прообразов открытых подмножеств пространства $Y^A$ при $R$. Эта топология называется *топологией поточечной сходимости на* $A$. Предбазу топологии $\mathfrak{P}_A$ образует семейство всех множеств вида $\{f : f(x) \in U\}$, где $x \in A$ и $U$ — множество, открытое в $Y$. Направленность $\{f_n, n \in D\}$ в $F$ сходится к $g$ относительно топологии $\mathfrak{P}_A$ тогда и только тогда, когда направленность $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к $g(x)$ при каждом $x$ из $A$. Отображение $R$ взаимно однозначно в том и лишь в том случае, когда для любых различных элементов $f$ и $g$ семейства $F$ существует такая точка $x \in A$, что $f(x) \neq g(x)$. Если подмножество $A$ множества $X$ удовлетворяет этому условию, то говорят, что оно *различает элементы семейства* $F$.

**2.** Теорема. *Пусть $F$ — некоторое семейство отображений множества $X$ в хаусдорфово пространство $Y$*

*и $A$ — подмножество множества $X$. Семейство $F$, наделенное топологией $\mathfrak{P}_A$ поточечной сходимости на $A$, является хаусдорфовым пространством в том и только в том случае, когда $A$ различает элементы семейства $F$. Если $F$ бикомпактно в топологии поточечной сходимости на $X$, а множество $A$ различает элементы семейства $F$, то топологии $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{P}_A$ совпадают.*

Доказательство. Пространство произведения $Y^A$ хаусдорфово. Из определения топологии $\mathfrak{P}_A$ следует, что $F$ хаусдорфово относительно нее в том и только в том случае, когда отображение сужения $R$ взаимно однозначно. Последнее условие эквивалентно тому, что $A$ различает элементы семейства $F$. Тождественное отображение $i$ пространства $(F, \mathfrak{P})$ на пространство $(F, \mathfrak{P}_A)$ непрерывно всегда, ибо всегда $\mathfrak{P}_A \subset \mathfrak{P}$. Если $(F, \mathfrak{P})$ бикомпактно и $(F, \mathfrak{P}_A)$ — хаусдорфово пространство, то $i$ — гомеоморфизм и $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_A$.

Если пространством значений служит равномерное пространство, то топология поточечной сходимости совпадает с топологией, порожденной равномерностью произведения.

Пусть $F$ — семейство отображений множества $X$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Тогда $F$ можно рассматривать как подмножество произведения $\Pi\{Y : x \in X\}$; равномерность, индуцированная на $F$ равномерностью произведения, называется *равномерностью поточечной сходимости* (или равномерностью простой сходимости). Часто полное название будет заменяться термином «$\mathfrak{P}$-равномерность». Свойства этой равномерности нами уже изучены (см., например, теорему 6.25).

Если $A$ — подмножество множества $X$, то равномерность поточечной сходимости на $A$, или просто $\mathfrak{P}_A$-равномерность, определяется как наименьшая равномерность, относительно которой отображение сужения $R$ пространства $F$ в семейство всех отображений множества $A$ в пространство $Y$ равномерно непрерывно. Ниже выписан без доказательства ряд простых фактов, связанных с $\mathfrak{P}_A$-равномерностью.

**3.** Теорема. *Пусть $F$ — некоторое семейство отображений множества $X$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ и $A$ — подмножество множества $X$. Тогда рав-*

*номерность поточечной сходимости на $A$ обладает следующими свойствами:*

(а) *Семейство всех множеств вида $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in V\}$, где $V \in \mathfrak{V}$ и $x \in A$, образует предбазу равномерности $\mathfrak{P}_A$.*

(б) *Топология $\mathfrak{P}_A$-равномерности совпадает с топологией поточечной сходимости на $A$.*

(в) *Направленность $\{f_n, n \in D\}$ является направленностью Коши в том и только в том случае, когда направленность $\{f_n(x), n \in D\}$ является направленностью Коши при каждом $x \in A$.*

(г) *Если пространство $(Y, \mathfrak{V})$ полно, а множество $R[F]$ замкнуто в $Y^A$ относительно топологии поточечной сходимости на $A$, то множество $F$, наделенное $\mathfrak{P}_A$-равномерностью, полно.*

## БИКОМПАКТНО ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ И СОВМЕСТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Если на семействе $F$ отображений топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$ задана топология, то естественно возникает вопрос, непрерывно ли зависит элемент $f(x)$ от совокупности $f$ и $x$. Чуть более формальная постановка вопроса такова: при каких топологиях на $F$ будет непрерывным отображение множества $F \times X$, наделенного топологией произведения, в пространство $Y$, заключающееся в том, что точке $(f, x)$ ставится в соответствие точка $f(x)$? Данный параграф посвящен краткому обсуждению этого вопроса. Оказывается, существует специальная топология на функциональном пространстве, тесно связанная со сформулированной задачей. Мы начнем с определения этой топологии и выяснения некоторых ее элементарных свойств. Весь параграф посвящен топологическим вопросам. Связи с некоторой равномерностью на функциональном пространстве будут установлены позднее. Всюду на протяжении параграфа $F$ будет некоторым семейством отображений топологического пространства $X$ в топологическое пространство $Y$.

Удобно следующее обозначение: для каждого подмножества $K$ пространства $X$ и каждого подмножества $U$