номерность поточечной сходимости на A обладает следующими свойствами:

(а) *Семейство всех множеств вида $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in V\}$, где $V \in \mathfrak{V}$ и $x \in A$, образует предбазу равномерности $\mathfrak{P}_A$.*

(б) *Топология $\mathfrak{P}_A$-равномерности совпадает с топологией поточечной сходимости на A.*

(в) *Направленность $\{f_n, n \in D\}$ является направленностью Коши в том и только в том случае, когда направленность $\{f_n(x), n \in D\}$ является направленностью Коши при каждом $x \in A$.*

(г) *Если пространство $(Y, \mathfrak{V})$ полно, а множество $R[F]$ замкнуто в Y^A относительно топологии поточечной сходимости на A, то множество F, наделенное $\mathfrak{P}_A$-равномерностью, полно.*

БИКОМПАКТНО ОТКРЫТАЯ ТОПОЛОГИЯ И СОВМЕСТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Если на семействе F отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y задана топология, то естественно возникает вопрос, непрерывно ли зависит элемент $f(x)$ от совокупности f и x. Чуть более формальная постановка вопроса такова: при каких топологиях на F будет непрерывным отображение множества $F \times X$, наделенного топологией произведения, в пространство Y, заключающееся в том, что точке (f, x) ставится в соответствие точка $f(x)$? Данный параграф посвящен краткому обсуждению этого вопроса. Оказывается, существует специальная топология на функциональном пространстве, тесно связанная со сформулированной задачей. Мы начнем с определения этой топологии и выяснения некоторых ее элементарных свойств. Весь параграф посвящен топологическим вопросам. Связи с некоторой равномерностью на функциональном пространстве будут установлены позднее. Всюду на протяжении параграфа F будет некоторым семейством отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y.

Удобно следующее обозначение: для каждого подмножества K пространства X и каждого подмножества U

пространства Y определим $W(K, U)$ как множество всех элементов семейства F, отображающих K в U. Таким образом, $W(K, U)=\{f: f[K]\subset U\}$. Семейство всех множеств $W(K, U)$, где K — любое бикомпактное подмножество пространства X и U — произвольное множество, открытое в Y, является предбазой *бикомпактно открытой* топологии $\mathfrak{C}$ на множестве F. Следовательно, семейство всевозможных пересечений конечного числа множеств вида $W(K, U)$, где K и U таковы, как выше, образует базу бикомпактно открытой топологии. Произвольный элемент этой базы имеет вид $\bigcap\{W(K_i, U_i): i=0, 1, \ldots$ $\ldots, n\}$, где каждое K_i — бикомпактное подмножество пространства X, а каждое U_i — открытое подмножество пространства Y. Тот факт, что каждое одноточечное множество бикомпактно, позволяет очень просто сравнить бикомпактно открытую топологию с топологией поточечной сходимости.

4. Теорема. *Бикомпактно открытая топология $\mathfrak{C}$ содержит топологию $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости. Пространство $(F, \mathfrak{C})$ хаусдорфово, если пространство значений Y хаусдорфово, и $(F, \mathfrak{C})$ регулярно, если Y регулярно, а F состоит из непрерывных отображений.*

Доказательство. Для каждой точки $x\in X$ и каждого открытого подмножества U пространства Y множество $W(\{x\}, U)=\{f: f(x)\in U\}$ принадлежит семейству $\mathfrak{C}$, ибо $\{x\}$ — бикомпактное множество. Следовательно, $\mathfrak{P}\subset\mathfrak{C}$, ибо семейство множеств вида $W(\{x\}, U)$ образует предбазу топологии поточечной сходимости $\mathfrak{P}$. Если Y — хаусдорфово пространство, то и $(F, \mathfrak{P})$ — хаусдорфово пространство в силу теоремы 3.5; каждые непересекающиеся $\mathfrak{P}$-окрестности U и V элементов семейства F являются также и $\mathfrak{C}$-окрестностями. Следовательно, $(F, \mathfrak{C})$ — хаусдорфово пространство.

Наконец, предположим, что пространство Y регулярно. Следует показать, что каждая окрестность произвольного элемента f семейства F содержит некоторую его замкнутую окрестность. Достаточно доказать, что это выполняется для каждой окрестности, принадлежащей некоторой предбазе топологии $\mathfrak{C}$, ибо произвольная окрестность элемента f содержит пересечение некоторого конечного множества элементов предбазы. Предположим, что $f \in W(K, U)$, где K — бикомпактное множество, а U — открытое множество. Множество $f[K]$ бикомпактно, и так как пространство Y регулярно, то из теоремы 5.10 следует, что существует такая замкнутая окрестность V множества $f[K]$, что $V \subset U$. Конечно, $f \in W(K, V) \subset W(K, U)$. Ясно, что $W(K, V)$ — окрестность элемента f. Остается показать, что множество $W(K, V)$ замкнуто. Но $W(K, V)$ является пересечением множеств $W(\{x\}, V)$ по всем x из K, каждое из которых $\mathfrak{P}$-замкнуто и, значит, $\mathfrak{C}$-замкнуто.

Безнадежно пытаться показать, что если пространство Y нормально или удовлетворяет первой аксиоме счетности, то теми же свойствами обладает пространство $(F, \mathfrak{C})$. В самом деле, когда X — дискретное пространство, бикомпактны лишь конечные множества, и, значит, в этом случае $\mathfrak{C}$ совпадает с топологией поточечной сходимости. Произведение нормальных пространств, равно как и произведение пространств с первой аксиомой счетности, может не обладать названным свойством сомножителей. Значит, и семейство F, наделенное топологией $\mathfrak{C}$, может его не иметь.

Обозначим через P отображение множества $F \times X$ в пространство Y, состоящее в том, что точке (f, x) соответствует точка $f(x)$. Топологии на F соответствует топология произведения на $F \times X$; естественно спросить: когда отображение P непрерывно относительно этой топологии произведения? Топология, заданная на множестве F, называется *совместно непрерывной* тогда и только тогда, когда отображение P пространства $F \times X$ в пространство Y непрерывно. Очень легко сообразить, что топология поточечной сходимости обычно бывает не совместно непрерывной. Дискретная топология совместно непрерывна, ибо если U — открытое подмножество пространства Y, то $P^{-1}[U] = \{(f, x) : f(x) \in U\} = \bigcup \{\{f\} \times f^{-1}[U] : f \in F\}$, где справа стоит объединение открытых множеств (мы предполагаем, что F состоит из непрерывных функций). Если некоторая топология на F совместно непрерывна, то и каждая бо́льшая ее топология тоже совместно непрерывна. Возникает естественная задача: найти наименьшую совместно непрерывную топологию, если таковая существует. Оказывается, что обычно наименьшей совместно непрерывной топологии не существует. Однако небольшое ослабление условия совместной непрерывности приводит в точности к бикомпактно открытой топологии. Топология, заданная на семействе F функций, называется *совместно непрерывной на множестве* A тогда и только тогда, когда отображение P, где $P(f, x) = f(x)$, непрерывно на пространстве $F \times A$. (Предостережение: это условие не означает, что отображение P непрерывно в точках множества $F \times A$; наложенное нами ограничение заключается в требовании непрерывности сужения $P | (F \times A)$.) Говорят, что заданная на семействе F топология *совместно непрерывна на бикомпактных множествах*, тогда и только тогда, когда она совместно непрерывна на каждом бикомпактном подмножестве области определения. Каждый элемент f такого семейства F непременно является функцией, непрерывной на каждом бикомпактном подмножестве K пространства X (т. е. $f | K$ непрерывна).

5. Теорема. *Каждая топология, совместно непрерывная на бикомпактных множествах, больше бикомпактно открытой топологии* $\mathfrak{C}$. *Если пространство* X *регулярно или хаусдорфово и* F *состоит из функций, непрерывных на бикомпактных подмножествах пространства* X, *то топология* $\mathfrak{C}$ *совместно непрерывна на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Пусть заданная на F топология $\mathfrak{J}$ совместно непрерывна на бикомпактных множествах, U — произвольное открытое подмножество пространства Y, K — бикомпактное подмножество пространства X и P — отображение, описываемое правилом: $P(f, x) = f(x)$. Следует показать, что подмножество $W(K, U)$, где $W(K, U) = \{f : f[K] \subset U\}$, $\mathfrak{J}$-открыто. Множество $V = (F \times K) \cap P^{-1}[U]$ открыто в произведении $F \times K$, ибо топология $\mathfrak{J}$ совместно непрерывна на бикомпактных множествах. Если $f \in W(K, U)$, то $\{f\} \times K \subset V$, и так как множество $\{f\} \times K$ бикомпактно, то существует такая $\mathfrak{J}$-окрестность N элемента f, что $N \times K \subset P^{-1}[U]$ в силу теоремы 5.12. Иными словами, каждый элемент $\mathfrak{J}$-окрестности N элемента f принадлежит множеству $W(K, U)$. Отсюда следует, что $W(K, U)$ $\mathfrak{J}$-открыто, и первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе утверждение Пусть K — бикомпактное подмножество пространства X, $x \in K$, U — множество, открытое в Y, и $(f, x) \in P^{-1}[U]$. Тогда, так как f непрерывна на K, то существует такое бикомпактное множество M, являющееся окрестностью точки x в пространстве K, что $f[M] \subset U$ (напоминаем, что пространство X либо хаусдорфово, либо регулярно). Тогда $W(M, U) \times M$ — окрестность элемента (f, x) в произведении $F \times K$, содержащаяся в множестве $P^{-1}[U]$. Совместная непрерывность на множестве K доказана.

Можно заметить, что если пространство X локально бикомпактно, то топология совместно непрерывна на бикомпактных множествах тогда и только тогда, когда она совместно непрерывна. Следовательно, если X — локально бикомпактное регулярное пространство, то бикомпактно открытая топология на семействе непрерывных отображений является наименьшей совместно непрерывной топологией *).

Если топология $\mathfrak{J}$ на семействе F совместно непрерывна на бикомпактных множествах, то $\mathfrak{J} \supset \mathfrak{C} \supset \mathfrak{P}$, где $\mathfrak{C}$ — бикомпактно открытая топология и $\mathfrak{P}$ — топология поточечной сходимости. Если пространство $(F, \mathfrak{J})$ бикомпактно, а пространство значений хаусдорфово, то $(F, \mathfrak{P})$ — хаусдорфово пространство и, следовательно, $\mathfrak{J} = \mathfrak{C} = \mathfrak{P}$. Этим доказана необходимость одного из условий $\mathfrak{C}$-бикомпактности, сформулированных в следующей теореме. Весьма любопытна сама формулировка результата; она приспособлена для прямого применения при решении одной дальнейшей задачи.

6. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство, либо регулярное, либо хаусдорфово, Y — хаусдорфово пространство и C — семейство всех отображений X в Y, непрерывных на каждом бикомпактном подмножестве пространства X. Пусть $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{P}$ — соответственно бикомпактно открытая топология и топология поточечной сходимости. Тогда подсемейство F семейства C $\mathfrak{C}$-бикомпактно в том и только в том случае, когда:*

(a) *F является множеством, $\mathfrak{C}$-замкнутым в C;*

---

*) Это утверждение верно для произвольных хаусдорфовых k-пространств. (*Прим. перев.*)

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки x из X;*

(в) *топология $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{P}$-замыкании множества F в Y^X совместно непрерывна на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Предположим, что семейство F $\mathfrak{C}$-бикомпактно. Пространство $(C, \mathfrak{C})$ хаусдорфово, ибо пространство Y хаусдорфово; следовательно, F является множеством, $\mathfrak{C}$-замкнутым в C. Вычисление в точке x является $\mathfrak{P}$-непрерывной и тем более $\mathfrak{C}$-непрерывной функцией. Следовательно образ $F(x)$ множества F бикомпактен. Топологии $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{P}$ на F совпадают, ибо F $\mathfrak{C}$-бикомпактно и $\mathfrak{P}$-хаусдорфово. Следовательно, F $\mathfrak{P}$-замкнуто в Y^X; в силу теоремы 7.5 топология $\mathfrak{C}$ (а значит, и топология $\mathfrak{P}$) на F совместно непрерывна на бикомпактных подмножествах. Этим доказательство необходимости условий (а), (б) и (в) завершено.

Пусть условия (а), (б) и (в) выполняются. Обозначим через $\bar{F}$ $\mathfrak{P}$-замыкание множества F в Y^X. Условие (б) состоит в том, что множество $\overline{F[x]}$ бикомпактно для каждой точки x; так как $\bar{F}$ — замкнутое подмножество $\mathfrak{P}$-бикомпактного множества $\Pi\{\overline{F[x]} : x \in X\}$, то отсюда следует, что семейство $\bar{F}$ $\mathfrak{P}$-бикомпактно. В силу условия (в) топология $\mathfrak{P}$ на $\bar{F}$ совместно непрерывна на бикомпактных подпространствах. Следовательно, каждый элемент семейства $\bar{F}$ непрерывен на каждом бикомпактном множестве, т. е. $\bar{F} \subset C$. Из теоремы 7.5 вытекает, что топология $\mathfrak{P}$ на $\bar{F}$ больше топологии $\mathfrak{C}$; значит, на $\bar{F}$ эти две топологии совпадают. В силу условия (а) семейство F $\mathfrak{C}$-замкнуто в C. Тем более F будет $\mathfrak{C}$- (а значит, и $\mathfrak{P}$-)замкнутым в подпространстве $\bar{F}$ пространства C. Значит, $\bar{F} = F$, и множество F $\mathfrak{C}$-бикомпактно.

7. Замечания. Семейство C всех функций, непрерывных на каждом бикомпактном подмножестве, совпадает с семейством всех непрерывных функций, если пространство локально бикомпактно или удовлетворяет первой аксиоме счетности (см. теорему 7.13 и предшествующее ей обсуждение). Обычно представляет интерес именно семейство всех непрерывных функций. Однако появление класса C вызвано структурой математики (а не капризом автора). Этот класс встретится

также несколько позже при обсуждении вопроса полноты.

Взаимоотношения бикомпактно открытой топологии и совместной непрерывности первым изучал Фокс [1]. Он показал, что бикомпактно открытая топология на семействе непрерывных функций меньше каждой совместно непрерывной топологии и что она сама совместно непрерывна, если отображаемое пространство локально бикомпактно. Доказательство того, что в общем случае не существует наименьшей совместно непрерывной топологии, можно найти в статье Аренса [1].

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Этот параграф посвящен изучению одной равномерности на семействе F отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{B})$. Она не зависит от топологии на множестве X. Однако один из важных результатов заключается в том, что семейство всех отображений, непрерывных относительно некоторой топологии на X, замкнуто в множестве всех отображений X в Y, наделенном топологией этой равномерности. Иными словами, предел непрерывных функций по равномерной топологии является непрерывной функцией.

Равномерность равномерной сходимости — наибольшая из тех, которые будут рассматриваться, а равномерность поточечной сходимости — наименьшая. Обе эти равномерности можно считать вариантами равномерности, соответствующей равномерной сходимости на элементах некоторого семейства $\mathfrak{A}$ множеств. Эта концепция исследуется вкратце: для каждого семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X строится некоторая равномерность и устанавливаются элементарные свойства последней.

Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{B})$. Для каждого элемента V равномерности $\mathfrak{B}$ обозначим через $W(V)$ множество*) всех пар (f, g) таких, что

*) Множество $W[V]$ очень просто описывается в терминах обычных обозначений для отношений: $W(V)=\{(f, g) : g \circ f^{-1} \subset V\}$. Это — понятное утверждение: $g \circ f^{-1}$ — в точности множество всех пар $(f(x), g(x))$, где $x \in X$ Ясно также, что $W(V)=\{(f, g) : g \subset V \circ f\}$ и $W(V)[f]=\{g : g \subset V \circ f\}=\{g : g(x) \in V[f(x)]$ *для каждого* x *из* $X\}$.