также несколько позже при обсуждении вопроса полноты.

Взаимоотношения бикомпактно открытой топологии и совместной непрерывности первым изучал Фокс [1]. Он показал, что бикомпактно открытая топология на семействе непрерывных функций меньше каждой совместно непрерывной топологии и что она сама совместно непрерывна, если отображаемое пространство локально бикомпактно. Доказательство того, что в общем случае не существует наименьшей совместно непрерывной топологии, можно найти в статье Аренса [1].

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Этот параграф посвящен изучению одной равномерности на семействе F отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Она не зависит от топологии на множестве X. Однако один из важных результатов заключается в том, что семейство всех отображений, непрерывных относительно некоторой топологии на X, замкнуто в множестве всех отображений X в Y, наделенном топологией этой равномерности. Иными словами, предел непрерывных функций по равномерной топологии является непрерывной функцией.

Равномерность равномерной сходимости — наибольшая из тех, которые будут рассматриваться, а равномерность поточечной сходимости — наименьшая. Обе эти равномерности можно считать вариантами равномерности, соответствующей равномерной сходимости на элементах некоторого семейства $\mathfrak{A}$ множеств. Эта концепция исследуется вкратце: для каждого семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X строится некоторая равномерность и устанавливаются элементарные свойства последней.

Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Для каждого элемента V равномерности $\mathfrak{V}$ обозначим через $W(V)$ множество*) всех пар (f, g) таких, что

---

*) Множество $W[V]$ очень просто описывается в терминах обычных обозначений для отношений: $W(V)=\{(f, g) : g \circ f^{-1} \subset V\}$. Это — понятное утверждение: $g \circ f^{-1}$ — в точности множество всех пар $(f(x), g(x))$, где $x \in X$ Ясно также, что $W(V)=\{(f, g) : g \subset V \circ f\}$ и $W(V)[f]=\{g : g \subset V \circ f\}=\{g : g(x) \in V[f(x)]$ *для каждого* x *из* $X\}$.

$(f(x), g(x)) \in V$ при каждом $x \in X$. Множество $W(V)[f]$ тогда состоит из всех g, для которых $g(x) \in V[f(x)]$ при каждом x из X. Легко видеть, что $W(V^{-1}) = (W(V))^{-1}$, $W(U \cap V) = W(U) \cap W(V)$ и $W(U \circ V) \supset W(U) \circ W(V)$ для всех элементов U и V равномерности $\mathfrak{V}$. Следовательно, семейство всех множеств вида $W(V)$, где $V \in \mathfrak{V}$, образует базу некоторой равномерности $\mathfrak{U}$ на множестве F в силу теоремы 6.2. Это семейство $\mathfrak{U}$ называется *равномерностью равномерной сходимости*, или просто *р. с.-равномерностью*. Топология, порожденная $\mathfrak{U}$, называется *топологией равномерной сходимости*, или *р. с.-топологией*.

Ясно, что $\mathfrak{U}$ больше равномерности поточечной сходимости. В самом деле, пусть y — произвольная точка множества X и $V \in \mathfrak{V}$. Тогда $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in V$ *для всех* $x \in X\} \subset \{(f, g) : (f(y), g(y)) \in V\}$ и, значит, каждый элемент определяющей предбазы равномерности $\mathfrak{U}$ является подмножеством некоторого элемента определяющей предбазы поточечной равномерности. Отсюда вытекает, что р. с.-топология больше*) топологии поточечной сходимости. Легко усмотреть также, что из равномерной сходимости вытекает поточечная сходимость, ибо направленность $\{f_n, n \in D\}$ в F сходится к g относительно р. с.-топологии тогда и только тогда, когда она с некоторого момента находится в множестве $W(V)[g]$ для каждого V из $\mathfrak{V}$. А последнее условие эквивалентно существованию такого элемента $m \in D$, что при $n \geqslant m$ будет $f_n(x) \in V[g(x)]$ для всех x из X. В следующей теореме перечисляются другие элементарные свойства равномерности $\mathfrak{U}$.

8. Теорема. *Пусть F — семейство всех отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ и $\mathfrak{U}$ — равномерность равномерной сходимости. Тогда*:

(a) *Равномерность $\mathfrak{U}$ порождается семейством всех псевдометрик вида $d^*(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$, где d — произвольная ограниченная псевдометрика из комплекта равномерного пространства $(Y, \mathfrak{V})$.*

---

*) Напоминаем, что термин «больше» в подобном контексте всегда следует понимать как «больше или совпадает». (*Прим. перев.*)

(б) *Направленность* $\{f_n, n \in D\}$ *в* F *сходится равномерно к* g *в том и только в том случае, когда она является направленностью Коши относительно* $\mathfrak{U}$ *и* $\{f_n(x), n \in D\}$ *сходится к* $g(x)$ *при каждом* x *из* X.

(в) *Если равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{B})$ *полно, то полно и равномерное пространство* $(F, \mathfrak{U})$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (а) заметим, что семейство всех множеств вида $\{(y, z): d(y, z) \leqslant r\}$, где $r > 0$ и d — любая ограниченная псевдометрика из комплекта равномерности $\mathfrak{B}$, образует базу равномерности $\mathfrak{B}$. Это так, ибо если e — произвольная псевдометрика на Y, то псевдометрика $d = \min[1, e]$ ограничена и порождает ту же равномерность, что и e. Но $\{(f, g): d^*(f, g) \leqslant r\} = \{(f, g): d(f(x), g(x)) \leqslant r$ *при каждом* x *из* $X\} = W(\{(y, z): d(y, z) \leqslant r\})$, где W — соответствие, участвовавшее выше в определении р. с.-равномерности. Отсюда следует, что d^* принадлежит комплекту равномерности $\mathfrak{U}$ и что псевдометрики вида d^* порождают этот комплект.

Половина утверждения (б) очевидна; надо только показать, что если направленность Коши $\{f_n, n \in D\}$ поточечно сходится к g, то она равномерно сходится к g. Пусть V — произвольный замкнутый симметричный элемент равномерности $\mathfrak{B}$. Выберем $m \in D$ так, чтобы при $n \geqslant m$ и $p \geqslant m$ было $f_p(x) \in V[f_n(x)]$ для каждой точки x пространства X. Такой выбор возможен, ибо предполагается, что рассматриваемая направленность является направленностью Коши относительно $\mathfrak{U}$. Так как множество $V[f_n(x)]$ замкнуто и направленность $f_p(x)$ сходится к $g(x)$, то $g(x) \in V[f_n(x)]$ и, значит, $f_n(x) \in V[g(x)]$ при каждом $n \geqslant m$ и любом x из X. Этим утверждение (б) доказано. Предложение (в) немедленно следует из (б) в силу того замечания, что произведение полных пространств полно.

Следующей теоремой выясняются принципиальные свойства равномерности $\mathfrak{U}$ в случае семейства непрерывных отображений.

9. Теорема. *Пусть* F — *семейство всех непрерывных отображений топологического пространства* X *в равномерное пространство* $(Y, \mathfrak{B})$ *и* $\mathfrak{U}$ — *равномерность равномерной сходимости. Тогда:*

(а) *Семейство F замкнуто в пространстве всех отображений множества X в Y и, значит, если $(Y, \mathfrak{V})$ полно, то и $(F, \mathfrak{U})$ полно.*

(б) *Топология равномерной сходимости совместно непрерывна.*

Доказательство. Предложение (а) будет доказано, если мы установим, что множество всех разрывных отображений образует открытое множество в пространстве G всех отображений множества X в $(Y, \mathfrak{U})$. Если функция f разрывна в точке $x \in X$, то существует такой элемент $V \in \mathfrak{V}$, что множество $f^{-1}[V[f(x)]]$ не является окрестностью точки x. Возьмем такой симметричный элемент W равномерности $\mathfrak{V}$, что $W \circ W \circ W \subset V$. Мы докажем, что если функция g удовлетворяет условию $(g(y), f(y)) \in W$ при каждом y, то множество $g^{-1}[W[g(x)]]$ не является окрестностью точки x, и, значит, функция g в этом случае разрывна. Отсюда будет следовать, что множество $G \setminus F$ открыто в топологии равномерной сходимости. Если $(g(y), f(y)) \in W$ при каждом y, то $g \subset W \circ f$ и $g^{-1} \subset f^{-1} \circ W^{-1} = f^{-1} \circ W$ и, следовательно, $g^{-1} \circ W \circ g \subset f^{-1} \circ W \circ W \circ W \circ f \subset f^{-1} \circ V \circ f$. Значит, множество $g^{-1}[W[g(x)]]$ является подмножеством множества $f^{-1}[V[f(x)]]$, и потому не может быть окрестностью точки x.

Остается доказать утверждение (б). Для доказательства непрерывности в точке (f, x) естественного отображения P пространства $F \times X$ в Y нужно только для произвольного $V \in \mathfrak{V}$ проверить, что если $y \in f^{-1}[V[f(x)]]$ и $g(z) \in V[f(z)]$ при всех z, то $g(y) \in V[f(y)] \subset V \circ V[f(x)]$.

При рассмотрении равномерной сходимости на элементах того или иного семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств области определения возникает ряд полезных равномерностей. Точнее, пусть F — некоторое семейство отображений множества X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ и $\mathfrak{A}$ — какое-нибудь семейство подмножеств множества X. *Равномерность равномерной сходимости* на элементах семейства $\mathfrak{A}$, сокращенно $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$, имеет предбазой семейство всех множеств вида $\{(f, g) : (f(x), g(x)) \in V$ *при всех x из A*$\}$, где $V \in \mathfrak{V}$ и $A \in \mathfrak{A}$. Можно описать эту равномерность иначе. Для каждого A из $\mathfrak{A}$ обозначим через R_A отображение, переводящее f в сужение f на множество A; таким образом, $R_A(f) = f|A$. Семейство F под действием отображения R_A переходит в некоторое семейство отображений множества A в пространство Y. Последнее семейство отображений можно наделить равномерностью равномерной сходимости. Теперь равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ можно описать как наименьшую среди тех, относительно которых все отображения R_A равномерно непрерывны.

Из доказанных выше утверждений о равномерной сходимости вытекают соответствующие результаты для равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. Простые доказательства их опускаются.

10. Теорема. *Пусть X — топологическое пространство, $(Y, \mathfrak{B})$ — равномерное пространство, $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств множества X, покрывающее X, G — семейство всех отображений множества X в пространство Y и F — множество всех отображений, непрерывных на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Тогда:*

(а) *Равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ равномерной сходимости на элементах семейства $\mathfrak{A}$ больше равномерности поточечной сходимости и меньше равномерности равномерной сходимости на X.*

(б) *Направленность $\{f_n, n \in D\}$ сходится к g относительно топологии $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ в том и только в том случае, когда она является направленностью Коши (по отношению к $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$) и сходится к g поточечно.*

(в) *Если пространство $(Y, \mathfrak{B})$ полно, то и множество G полно относительно равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$.*

(г) *Семейство F замкнуто в G относительно топологии равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$; следовательно, если $(Y, \mathfrak{B})$ полно, то и $(F, \mathfrak{U}|\mathfrak{A})$ полно.*

(д) *Топология, порожденная на F равномерностью $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$, совместно непрерывна на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$.*

Следует подчеркнуть, что семейство всех непрерывных отображений может не быть полным в равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ — семейство всех множеств $\{x\}$, где $x \in X$, то $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$ — просто равномерность поточечной сходимости, а семейство всех непрерывных отображений обычно не полно по отношению к этой равномерности.

Если семейство $\mathfrak{A}$ таково, что из непрерывности отображения на каждом его элементе вытекает, что это отображение непрерывно на всем X, то из выписанного выше утверждения (г) следует, что семейство всех непрерывных отображений множества X в полное пространство полно относительно равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. В частности, таковой будет ситуация, когда у каждой точки есть окрестность, принадлежащая семейству $\mathfrak{A}$.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НА БИКОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В этом параграфе соединяются воедино два направления исследований. Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Равномерность *равномерной сходимости на бикомпактных множествах* — это равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — семейство всех бикомпактных подмножеств пространства X. Топологию равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ иногда называют *топологией бикомпактной сходимости*. Будет доказано, что эта топология совпадает с бикомпактно открытой топологией, построенной, исходя из топологии пространства X и топологии, порожденной равномерностью $\mathfrak{V}$. Таким образом, равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ зависит от равномерности $\mathfrak{V}$, заданной на Y, но топология равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ зависит только от топологии равномерности $\mathfrak{V}$. Равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ особенно полезна, когда пространство X обладает «богатым» набором бикомпактных подмножеств. В конце параграфа мы вкратце рассмотрим один такой класс пространств.

11. Теорема. *Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. На F топология равномерной сходимости на бикомпактных подмножествах совпадает с бикомпактно открытой топологией.*

Доказательство. Пусть K — бикомпактное подмножество пространства X, U — множество, открытое в Y, $f \in F$ и $f[K] \subset U$. Множество $f[K]$ бикомпактно; в силу теоремы 6.33 существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $V[f[K]] \subset U$. Ясно поэтому, что если функция g удовлетворяет условию $g(x) \in V[f(x)]$ для каждой точки x множества K, то $g[K] \subset U$. Следовательно, каждое множество вида $\{f : f[K] \subset U\}$ открыто в топологии равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$, т. е.