выше утверждения (г) следует, что семейство всех непрерывных отображений множества X в полное пространство полно относительно равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{A}$. В частности, таковой будет ситуация, когда у каждой точки есть окрестность, принадлежащая семейству $\mathfrak{A}$.

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НА БИКОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

В этом параграфе соединяются воедино два направления исследований. Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Равномерность *равномерной сходимости на бикомпактных множествах* — это равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — семейство всех бикомпактных подмножеств пространства X. Топологию равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ иногда называют *топологией бикомпактной сходимости.* Будет доказано, что эта топология совпадает с бикомпактно открытой топологией, построенной, исходя из топологии пространства X и топологии, порожденной равномерностью $\mathfrak{V}$. Таким образом, равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ зависит от равномерности $\mathfrak{V}$, заданной на Y, но топология равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ зависит только от топологии равномерности $\mathfrak{V}$. Равномерность $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$ особенно полезна, когда пространство X обладает «богатым» набором бикомпактных подмножеств. В конце параграфа мы вкратце рассмотрим один такой класс пространств.

11. Теорема. *Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. На F топология равномерной сходимости на бикомпактных подмножествах совпадает с бикомпактно открытой топологией.*

Доказательство. Пусть K — бикомпактное подмножество пространства X, U — множество, открытое в Y, $f \in F$ и $f[K] \subset U$. Множество $f[K]$ бикомпактно; в силу теоремы 6.33 существует $V \in \mathfrak{V}$, для которого $V[f[K]] \subset U$. Ясно поэтому, что если функция g удовлетворяет условию $g(x) \in V[f(x)]$ для каждой точки x множества K, то $g[K] \subset U$. Следовательно, каждое множество вида $\{f : f[K] \subset U\}$ открыто в топологии равномерности $\mathfrak{U}|\mathfrak{C}$, т. е.

бикомпактно открытая топология меньше топологии равномерности $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{C}$.

Докажем обратное утверждение. Мы должны установить, что, каковы бы ни были бикомпактное подмножество K пространства X, элемент V равномерности $\mathfrak{B}$ и непрерывная функция f, найдутся бикомпактные подмножества $K_1, \ldots, K_n$ пространства X и открытые подмножества $U_1, \ldots, U_n$ пространства X такие, что $f[K_i] \subset U_i$, причем если $g[K_i] \subset U_i$ при каждом i, то $g(x) \in V[f(x)]$ при всех x из K. Выберем такой замкнутый симметричный элемент $W \in \mathfrak{B}$, что $W \circ W \circ W \subset V$. Найдем точки $x_1, \ldots, x_n$ в множестве K так, чтобы множества $W[f(x_i)]$ покрывали в совокупности $f[K]$. Положим $K_i = K \cap f^{-1}[W[f(x_i)]]$ и обозначим через U_i внутренность множества $W \circ W[f(x_i)]$. Если $g[K_i] \subset U_i$ при каждом i, то для каждого $x \in K$ существует такое i, что $x \in K_i$. Тогда для этих i и x $g(x) \in W \circ W[f(x_i)]$ и, так как $f(x) \in W[f(x_i)]$, то $(g(x), f(x)) \in W \circ W \circ W \subset V$.

Если равномерное пространство $(Y, \mathfrak{B})$ полно и $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство подмножеств топологического пространства X, то семейство всех отображений X в Y, непрерывных на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$, образует в соответствии с теоремой 7.10 $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$- полное пространство. Поэтому для того, чтобы множество всех непрерывных функций было полно в равномерности $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$, достаточно, чтобы семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяло следующему условию: функция непрерывна, если она непрерывна на каждом элементе семейства $\mathfrak{A}$. Пусть f обозначает произвольную функцию, отображающую X в Y, и B — произвольное подмножество Y. Сформулированное выше условие заведомо будет выполняться тогда, когда из замкнутости множества $A \cap f^{-1}[B]$ для каждого $A \in \mathfrak{A}$ вытекает, что замкнуто множество $f^{-1}[B]$. В частности, пространство всех непрерывных функций, отображающих X в Y, полно относительно равномерной сходимости на бикомпактных множествах, если каждое подмножество A пространства X, пересечение которого с любым замкнутым бикомпактным множеством замкнуто, само замкнуто в X. Топологические пространства, удовлетворяющие последнему условию, называются *k-пространствами*. Ясно, что семейство $\mathfrak{C}$ всех замкнутых бикомпактных подмножеств k-пространства полностью определяет его топологию: множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap C \in \mathfrak{C}$ для каждого $C \in \mathfrak{C}$. Переходя к дополнениям, заключаем, что подмножество U k-пространства открыто в том и лишь в том случае, когда $U \cap C$ открыто в C для каждого замкнутого бикомпактного множества C.

Следующая теорема с очевидностью вытекает из определения k-пространства и предшествующих замечаний.

12. Теорема. *Семейство всех непрерывных отображений k-пространства в полное равномерное пространство полно относительно равномерной сходимости на бикомпактных множествах.*

С двумя самыми важными классами пространств, охватываемыми классом k-пространств, знакомит нас

13. Теорема. *Если хаусдорфово пространство X локально бикомпактно или удовлетворяет первой аксиоме счетности, то оно является k-пространством* *).

Доказательство. В обоих случаях доказательство начинается с предположения, что B — не замкнутое подмножество пространства X, и заключается в отыскании замкнутого бикомпактного множества $C \subset X$, для которого $B \cap C$ не замкнуто. Пусть x — предельная точка для множества B, не принадлежащая ему. Если пространство X локально бикомпактно, то у точки x есть бикомпактная окрестность U. Пересечение $B \cap U$ не замкнуто, ибо x — предельная точка для множества $B \cap U$, не принадлежащая ему. Если X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то существует последовательность $\{y_n, n \in \omega\}$ в $B \setminus \{x\}$, сходящаяся к x. Объединение множества $\{x\}$ и множества всех точек y_n этой последовательности, очевидно, бикомпактно, но его пересечение с множеством B не замкнуто.

---

*) Теория k-пространств была в последнее время продвинута, см. Архангельский [4] В указанной работе доказано, что все пространства, полные в смысле Чеха, и даже все p-пространства (см. Архангельский [5]), являются k-пространствами. Любопытны результаты де Гроота, Нобла, Уоттела. (*Прим. перев.*)