БИКОМПАКТНОСТЬ И РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Это — первый из двух параграфов, посвященных отысканию условий бикомпактности семейства функций относительно бикомпактно открытой топологии. Желаемое заключение топологическое; самые сильные результаты получаются при чисто топологических посылках. Однако для равномерностей рассуждения проще; этот параграф касается отображений в равномерное пространство. В последнем параграфе главы рассматривается чисто топологическая задача.

Пусть F — некоторое семейство отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$. Семейство F называется *равностепенно непрерывным в точке* x в том и только в том случае, когда для каждого элемента V равномерности $\mathfrak{V}$ существует такая окрестность U точки x, что $f[U] \subset V[f(x)]$ при каждом $f \in F$. Эквивалентное условие: F равностепенно непрерывно в x тогда и только тогда, когда $\bigcap \{f^{-1}[V[f(x)]] : f \in F\}$ является окрестностью точки x при каждом $V \in \mathfrak{V}$. Попросту говоря, семейство F равностепенно непрерывно в точке x в том и лишь в том случае, когда у точки x существует окрестность, образ которой при любом отображении из семейства F мал.

14. Теорема. *Если семейство F равностепенно непрерывно в точке x, то замыкание F по топологии $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости тоже образует равностепенно непрерывное в x семейство.*

Доказательство. Пусть V — замкнутый элемент заданной на Y равномерности. Класс всех отображений f, удовлетворяющих условию $f[U] \subset V[f(x)]$, очевидно, замкнут в топологии $\mathfrak{P}$ поточечной сходимости, ибо он совпадает с множеством $\bigcap \{\{f : (f(y), f(x)) \in V\} : y \in U\}$. Следовательно, замыкание множества F в топологии поточечной сходимости равностепенно непрерывно.

Семейство F функций называется *равностепенно непрерывным* тогда и только тогда, когда оно равностепенно непрерывно в каждой точке. В силу предшествующей теоремы замыкание равностепенно непрерывного семейства по топологии поточечной сходимости само образует равностепенно непрерывное семейство. Это означает, в частности, что все отображения, принадлежащие упомянутому замыканию, непрерывны. Топология поточечной сходимости по отношению к равностепенно непрерывным семействам обладает и другими достойными внимания свойствами.

15. Теорема. *На каждом равностепенно непрерывном семействе F топология поточечной сходимости совместно непрерывна; поэтому она совпадает на F с топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Докажем, что естественное отображение P пространства $F \times X$ в пространство Y непрерывно в (f, x). Пусть V — произвольный элемент равномерности, заданной на Y, и U — такая окрестность точки x, что $g[U] \subset V[g(x)]$ для всех g из F. Если g принадлежит $\mathfrak{P}$-окрестности $\{h : h(x) \in V[f(x)]\}$ функции f и $y \in U$, то $g(y) \in V[g(x)]$ и $g(x) \in V[f(x)]$. Следовательно, $g(y) \in V \circ V[f(x)]$, откуда и вытекает совместная непрерывность рассматриваемой топологии на F. Каждая совместно непрерывная топология в силу теоремы 7.5 больше бикомпактно открытой топологии, а по теореме 7.11 бикомпактно открытая топология совпадает с топологией, отвечающей равномерной сходимости на бикомпактных множествах.

Из предыдущей теоремы вытекает, что если равностепенно непрерывное семейство функций бикомпактно в топологии поточечной сходимости $\mathfrak{P}$, то оно бикомпактно и в топологии равномерной сходимости на бикомпактных множествах. Напомним, что теорема Тихонова дает достаточные условия $\mathfrak{P}$-бикомпактности. Рассуждая таким образом, можно установить, что из равностепенной непрерывности семейства функций, подкрепленной некоторыми другими условиями, следует его бикомпактность. Утверждение, идущее в обратном направлении, дано ниже.

16. Теорема. *Если семейство F отображений топологического пространства X в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ бикомпактно относительно некоторой совместно непрерывной топологии, то F равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть x — некоторая фиксированная точка пространства X и V — симметричный элемент равномерности $\mathfrak{V}$. Теорема будет доказана, если мы установим, что существует такая окрестность U точки x, что $g[U] \subset V \circ V[g(x)]$ для всех $g \in F$. Поскольку топология, заданная на F, совместно непрерывна, существуют окрестность G произвольного элемента $f \in F$ и окрестность W точки x такие, что образ множества $G \times W$ содержится в множестве $V[f(x)]$. Если $g \in G$ и $w \in W$, то точки $g(x)$ и $g(w)$ принадлежат множеству $V[f(x)]$; значит, $g(w) \in V \circ V[g(x)]$. Это означает, что $g[W] \subset V \circ V[g(x)]$ при каждом g из G. В силу бикомпактности F существуют конечное семейство $G_1, \ldots, G_n$, покрывающее F, и семейство соответствующих окрестностей $W_1, \ldots, W_n$ точки x такие, что $g[W_i] \subset V \circ V[g(x)]$ при каждом g из G_i. Ясно, что если в качестве U взять пересечение окрестностей W_i, то будет $g[U] \subset V \circ V[g(x)]$ при каждом $g \in G$.

Теорема Асколи для локально бикомпактных пространств немедленно вытекает из предыдущих результатов. Она получается заменой в формулировке теоремы 7.6 условия «топология поточечной сходимости $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{P}$-замыкании множества F совместно непрерывна на бикомпактных множествах» на такое: «семейство F равностепенно непрерывно». Первое условие следует из второго (теоремы 7.14 и 7.15), а из бикомпактности в силу теоремы 7.16 вытекает равностепенная непрерывность. (Легко дать и доказательство теоремы Асколи, не зависящее от теоремы 7.6.)

17. Теорема Асколи. *Пусть C — семейство всех непрерывных отображений регулярного локально бикомпактного топологического пространства X в хаусдорфово равномерное пространство, наделенное топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах. Тогда подсемейство F семейства C бикомпактно в том и только в том случае, когда*

(а) *F замкнуто в C,*

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки $x \in X$,*

(в) *семейство F равностепенно непрерывно.*

Есть вариант теоремы Асколи, касающийся отображений произвольного k-пространства (пространства, в котором множество замкнуто, если его пересечение с каждым бикомпактным замкнутым множеством замкнуто). В основе его лежит модификация понятия равностепенной непрерывности. Семейство F отображений называется *равностепенно непрерывным на множестве* A тогда и только тогда, когда семейство всех сужений элементов F на A равностепенно непрерывно. Семейство отображений, равностепенно непрерывное в каждой точке множества A, равностепенно непрерывно на A; однако обратное утверждение неверно. Но каждое равностепенно непрерывное на множестве A семейство отображений равностепенно непрерывно в каждой внутренней точке множества A.

Доказательство следующей теоремы опускается. Она сразу вытекает из теоремы 7.6, результатов этого параграфа и того факта *), что отображение k-пространства, непрерывное на каждом его бикомпактном подмножестве, непрерывно на всем пространстве **).

18. Теорема Асколи. *Пусть C — семейство всех непрерывных отображений k-пространства X, либо хаусдорфова, либо регулярного, в хаусдорфово равномерное пространство Y и пусть C наделено топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах. Тогда подсемейство F семейства C бикомпактно в том и только в том случае, когда выполняются условия:*

(а) *F замкнуто в C,*

(б) *замыкание множества $F(x)$ бикомпактно при каждом $x \in X$,*

(в) *F равностепенно непрерывно на каждом бикомпактном подмножестве пространства X.*

---

*) Очевидно, ограничение «X есть k-пространство» можно исключить из посылок теоремы, если семейство C всех непрерывных функций заменить семейством всех функций, непрерывных на каждом бикомпактном подмножестве. Впрочем, этот результат можно вывести из нашей теоремы, применив ее к множеству X с такой топологией $\mathfrak{J}$: множество A $\mathfrak{J}$-замкнуто тогда и только тогда, когда в исходной топологии $A \cap B$ замкнуто для каждого замкнутого бикомпактного множества B.

**) Последнее условие определяет f_k-пространства. Они могут не быть k-пространствами (см. стр. 316). (*Прим. перев.*)