ОДНООБРАЗНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Этот параграф посвящен доказательству разновидности теоремы Асколи для топологических пространств. Ход мысли тот же, что и в предыдущем параграфе, только равномерный вариант равностепенной непрерывности заменяет ее топологическая концепция. Соотношения между этими двумя понятиями кратко обсуждаются в конце параграфа.

Пусть F — некоторое семейство отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y. Концепция однообразной непрерывности интуитивно может быть выражена условием: для каждых $x \in X$, $y \in Y$ и $f \in F$, если $f(x)$ лежит близко к y, то точки, расположенные вблизи от x, переходят под действием f в точки, лежащие вблизи от y. Точная формулировка: семейство F называется *однообразно непрерывным* тогда и только тогда, когда, каковы бы ни были точка $x \in X$, точка $y \in Y$ и окрестность U точки y, найдутся окрестность V точки x и окрестность W точки y такие, что если $f(x) \in W$, то $f[V] \subset U$. Тесная связь введенного понятия с понятием совместной непрерывности подчеркивается следующей формулировкой: F однообразно непрерывно в том и только в том случае, когда для любых точек $x \in X$, $y \in Y$ и окрестности U точки y существуют окрестность W точки y и окрестность V точки x такие, что образ множества $\{f : f \in F \text{ и } f(x) \in W\} \times V$ при естественном отображении содержится в U. Легко устанавливается главное свойство однообразно непрерывных семейств отображений.

19. Теорема. *Пусть F — некоторое однообразно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в регулярное пространство Y и $\mathfrak{P}$ — топология поточечной сходимости. Тогда $\mathfrak{P}$-замыкание $\bar{F}$ множества F однообразно непрерывно и топология $\mathfrak{P}$ совместно непрерывна на $\bar{F}$.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы с очевидностью вытекает из второй формулировки определения однообразной непрерывности, ибо, когда W открыто в V, множество $\{f : f \in F \text{ и } f(x) \in W\}$ $\mathfrak{P}$-открыто. Покажем, что $\mathfrak{P}$-замыкание множества F однообразно непрерывно. Пусть $x \in X$, $y \in Y$ и U — окрестность точки y. В силу регулярности пространства Y можно предположить, что множество U замкнуто. Выберем окрестность V точки x и открытую окрестность W точки y так, чтобы из $f \in F$ и $f(x) \in W$ следовало, что $f[V] \subset U$. Предположим теперь, что $\{g_n, n \in D\}$ — направленность в F, поточечно сходящаяся к некоторому отображению g, причем $g(x) \in W$. Направленность $\{g_n(x), n \in D\}$ с некоторого момента находится в множестве W. Следовательно, для каждого z из V направленность $\{g_n(z), n \in D\}$ с некоторого момента находится в множестве U и, значит, $g(z) \in U$. Этим доказано, что $g[V] \subset U$.

Достаточные условия бикомпактности однообразно непрерывного семейства отображений более или менее очевидны в силу предшествующего результата и теоремы 7.6. Следующим утверждением устанавливается необходимость условий, участвующих в теореме Асколи.

20. Теорема. *Если семейство F непрерывных отображений топологического пространства X в регулярное хаусдорфово пространство Y бикомпактно в некоторой совместно непрерывной топологии, то F — однообразно непрерывное семейство.*

Доказательство. Тождественное отображение заданного бикомпактного пространства F в множество F, взятое с топологией поточечной сходимости, непрерывно, а так как последняя топология хаусдорфова, то заданная топология совпадает с ней. Значит, на семействе F топология поточечной сходимости совместно непрерывна. Пусть теперь $x \in X$, $y \in Y$ и U — любая окрестность точки y. Обозначим через W какую-нибудь замкнутую окрестность точки y, содержащуюся в U, и заметим, что множество K всех таких $f \in F$, что $f(x) \in W$, замкнуто в топологии поточечной сходимости и потому бикомпактно. Пусть P — естественное отображение, описываемое формулой $P(f, x) = f(x)$. Бикомпактное множество $K \times \{x\}$ содержится в множестве $P^{-1}[U]$. Из непрерывности отображения P, применив теорему 5.12, мы выводим, что существует окрестность V точки x, для которой $K \times V \subset P^{-1}[U]$. Это означает, что если $v \in V$ и $f(x) \in W$, то $f(v) \in U$.

21. Теорема Асколи. *Пусть C — семейство всех непрерывных отображений регулярного локально бикомпактного пространства X в регулярное хаусдорфово пространство Y. Предположим, что C наделено бикомпактно открытой топологией. Тогда подмножество F множества C бикомпактно в том и только в том случае, когда:*

(а) *F замкнуто в C,*

(б) *замыкание множества $F[x]$ бикомпактно для каждой точки $x \in X$,*

(в) *семейство F однообразно непрерывно.*

Доказательство. Если множество F бикомпактно относительно бикомпактно открытой топологии, то утверждения (а), (б) и (в) вытекают из теорем 7.6 и 7.20. Если условия (а), (б) и (в) выполняются для F, то в силу теоремы 7.19 замыкание множества F в топологии поточечной сходимости является однообразно непрерывным семейством, на котором топология поточечной сходимости совместно непрерывна. Бикомпактность F следует теперь из теоремы 7.6.

Предшествующую теорему можно распространить на случай k-пространств таким же образом, как это было сделано для теоремы 7.17. Говорят, что семейство F функций *однообразно непрерывно на множестве A*, тогда и только тогда, когда семейство сужений всех элементов F на A однообразно непрерывно. Приняв это определение, мы можем доказать теорему Асколи (7.21) для произвольных k-пространств, заменив в ее формулировке условие (в) на такое: «F однообразно непрерывно на каждом бикомпактном подмножестве пространства X». Прямое доказательство получающегося утверждения опускается.

В заключение данного параграфа мы приведем два предложения, поясняющих соотношение между однообразной непрерывностью и равностепенной непрерывностью.

22. Теорема. *Каждое равностепенно непрерывное семейство отображений топологического пространства в равномерное пространство однообразно непрерывно.*

Доказательство. Пусть F — некоторое равностепенно непрерывное семейство отображений X в Y,

$x \in X$, $y \in Y$, и U — окрестность точки y. Можно считать, что U — шар d-радиуса r с центром в точке y, где d — некоторая псевдометрика из комплекта пространства Y и $r>0$. Так как семейство F равностепенно непрерывно в точке x, у x есть такая окрестность V, что если $z \in V$, то $d(f(x), f(z)) < \frac{r}{2}$ при всех f из F. Следовательно, если $z \in V$ и $f(x)$ лежит в шаре с центром в y d-радиуса $\frac{r}{2}$, то $f(z) \in U$.

В определенном смысле можно сказать, что равностепенная непрерывность получается из однообразной непрерывности при подходящем задании равномерности на пространстве значений. Как можно было ожидать, равностепенная непрерывность вытекает из однообразной непрерывности в присутствии подходящего условия типа бикомпактности.

23. Теорема*). *Пусть F — однообразно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в равномерное пространство Y и для некоторой точки $x \in X$ замыкание множества $F[x]$ бикомпактно. Тогда F равностепенно непрерывно в x.*

Доказательство. Пусть d — некоторая псевдометрика из комплекта равномерного пространства Y и $r>0$. Для каждой точки $y \in \overline{F[x]}$ существуют ее окрестность W и окрестность V точки x такие, что если $f(x) \in W$, то $f[V]$ содержится в шаре d-радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в y. Так как множество $\overline{F[x]}$ бикомпактно, то существуют конечное семейство окрестностей W_i точек y_i множества $\overline{F[x]}$ и семейство соответствующих окрестностей V_i точки x, где $i=1, \ldots, n$, такие, что W_i в совокупности покрывают $\overline{F[x]}$, и если $f(x) \in W_i$, то $f[V_i]$ содержится в шаре d-радиуса $\frac{r}{2}$ с центром в y_i. Следовательно, если $z \in T = \bigcap \{V_i : i=0, 1, \ldots, n\}$ и $f \in F$, то $f(x)$ лежит в некотором W_i, и так как $f(T)$ — подмножество некоторого

---

*) Теорема перестает быть верной, если условие «замыкание множества $F[x]$ бикомпактно» заменить на такое: «множество $F[x]$ вполне ограничено».

шара d-радиуса $\frac{r}{2}$, $d(f(x),\ f(y))<r$ при каждом $y \in T$. Значит, семейство F равностепенно непрерывно в точке x.

Замечания. Результаты этого параграфа принадлежат А. Р. Морсу и мне. В другой форме теорема Асколи для топологических пространств была получена Гейлом [1].

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на топологию поточечной сходимости

Множество всех непрерывных вещественных функций на тихоновском пространстве X плотно относительно топологии поточечной сходимости в множестве всех вещественных функций, определенных на X.

Б. Упражнение на сходимость функций

Пусть f — непрерывная вещественная функция на замкнутом единичном интервале $[0, 1]$, обращающаяся в нуль на концах его и не равная тождественно нулю. Положим, $g_n(x)=f(x^n)$ при каждом неотрицательном целом n. Последовательность $\{g_n, n \in \omega\}$ сходится поточечно (но не равномерно) к функции h, тождественно равной нулю. Объединение множества всех g_n с $\{h\}$ бикомпактно в топологии поточечной сходимости, но не бикомпактно в топологии равномерной сходимости.

В. Поточечная сходимость на всюду плотном подмножестве

Пусть F — равностепенно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в некоторое равномерное пространство и A — подмножество, плотное в X. Тогда равномерность поточечной сходимости на X совпадает с равномерностью поточечной сходимости на A.

Г. Диагональный процесс и секвенциальная компактность

До теоремы Тихонова о произведении стандартным средством доказательства бикомпактности того или иного семейства отображений служил диагональный процесс; ниже приводятся примеры основанных на нем рассуждений. Напомним, что топологическое пространство называется секвенциально компактным, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства.

(а) Произведение счетного семейства секвенциально компактных топологических пространств секвенциально компактно *). (Пусть

---

*) А. Стоун недавно доказал, что произведение $\aleph_1$ секвенциально компактных пространств счетно компактно (из любого счетного открытого покрытия последнего можно выбрать конечное покрытие), и поставил задачу: верно ли, что произведение любого множества секвенциально компактных пространств счетно компактно? П. Кендеров показал, что ответ положителен, когда произведение — нормальное пространство. (*Прим. перев.*)