шара d-радиуса $\frac{r}{2}$, $d(f(x), f(y))<r$ при каждом $y \in T$. Значит, семейство F равностепенно непрерывно в точке x.

Замечания. Результаты этого параграфа принадлежат А. Р. Морсу и мне. В другой форме теорема Асколи для топологических пространств была получена Гейлом [1].

ЗАДАЧИ

А. Упражнение на топологию поточечной сходимости

Множество всех непрерывных вещественных функций на тихоновском пространстве X плотно относительно топологии поточечной сходимости в множестве всех вещественных функций, определенных на X.

Б. Упражнение на сходимость функций

Пусть f — непрерывная вещественная функция на замкнутом единичном интервале $[0, 1]$, обращающаяся в нуль на концах его и не равная тождественно нулю. Положим, $g_n(x)=f(x^n)$ при каждом неотрицательном целом n. Последовательность $\{g_n, n \in \omega\}$ сходится поточечно (но не равномерно) к функции h, тождественно равной нулю. Объединение множества всех g_n с $\{h\}$ бикомпактно в топологии поточечной сходимости, но не бикомпактно в топологии равномерной сходимости.

В. Поточечная сходимость на всюду плотном подмножестве

Пусть F — равностепенно непрерывное семейство отображений топологического пространства X в некоторое равномерное пространство и A — подмножество, плотное в X. Тогда равномерность поточечной сходимости на X совпадает с равномерностью поточечной сходимости на A.

Г. Диагональный процесс и секвенциальная компактность

До теоремы Тихонова о произведении стандартным средством доказательства бикомпактности того или иного семейства отображений служил диагональный процесс; ниже приводятся примеры основанных на нем рассуждений. Напомним, что топологическое пространство называется секвенциально компактным, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства.

(а) Произведение счетного семейства секвенциально компактных топологических пространств секвенциально компактно *). (Пусть

---

*) А. Стоун недавно доказал, что произведение $\aleph_1$ секвенциально компактных пространств счетно компактно (из любого счетного открытого покрытия последнего можно выбрать конечное покрытие), и поставил задачу: верно ли, что произведение любого множества секвенциально компактных пространств счетно компактно? П. Кендеров показал, что ответ положителен, когда произведение — нормальное пространство. (*Прим. перев.*)

$\{Y_m, m \in \omega\}$ — последовательность секвенциально компактных пространств и $\{f_n, n \in \omega\}$ — некоторая последовательность точек в произведении $\Pi\{Y_m : m \in \omega\}$. Выберем в ω бесконечное подмножество A_0 такое, что последовательность $\{f_n(0), n \in A_0\}$ сходится к некоторой точке пространства Y_0, и, рассуждая по индукции, найдем такое бесконечное подмножество A_{k+1} множества A_k, что последовательность $\{f_n(k+1), n \in A_{k+1}\}$ сходится к некоторой точке пространства Y_{k+1}. Пусть N_k — k-й элемент последовательности A_k; тогда $\{f_{N_k}, k \in \omega\}$ — искомая подпоследовательность.)

(б) Пусть Y — секвенциально компактное равномерное пространство, X — сепарабельное топологическое пространство и F — некоторое равностепенно непрерывное семейство отображений X в Y, замкнутое в Y^X относительно топологии поточечной сходимости. Тогда F секвенциально компактно относительно топологии поточечной сходимости (а также и относительно бикомпактно открытой топологии). (Примените 7. В; убедитесь, что у каждой последовательности Коши в Y есть предельная точка.)

З а м е ч а н и е. Несколько очень красивых результатов, касающихся счетной компактности функциональных пространств, получил недавно Г р о т е н д и к [1]. Результаты Гротендика непосредственно применяются при решении ряда интересных задач о линейных топологических пространствах.

Д. Теорема Дини

Если монотонно возрастающая направленность $\{f_n, n \in D\}$ непрерывных вещественных функций на топологическом пространстве X сходится поточечно к некоторой непрерывной функции f, то на бикомпактных множествах эта направленность сходится к f равномерно. (Это — типичное рассуждение про бикомпактные множества. Пусть C — какое-нибудь бикомпактное подмножество пространства X и $A_n = \{(x, y) : x \in C$ и $f_n(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Заметим, что пересечение множеств A_n по всем n из D есть попросту график функции $f|C$.)

Е. Непрерывность индуцированного отображения

Пусть X и Y — множества, а $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — соответственно семейства их подмножеств. Пусть, далее, F — семейство всех отображений множества X в равномерное пространство $(Z, \mathfrak{U})$ и G — семейство всех отображений множества Y в $(Z, \mathfrak{U})$. Пусть T — отображение X в Y; тогда *индуцированное отображение* T^* семейства G в семейство F определяется так. $T^*(g) = g \circ T$ для всех $g \in G$. Если для каждого элемента A семейства $\mathfrak{A}$ множество $T[A]$ содержится в некотором элементе семейства $\mathfrak{B}$, то отображение T^* равномерно непрерывно относительно равномерностей $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$ на F и $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{B}$ на G (отвечающих равномерной сходимости на элементах семейства $\mathfrak{A}$, соответственно, на элементах семейства $\mathfrak{B}$). В частности, T^* всегда равномерно непрерывно относительно равномерностей равномерной сходимости и T^* равномерно непрерывно по отношению к равномерности поточечной сходимости на F и равномерности $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ на G, если семейство $\mathfrak{B}$ покрывает Y. Если X и Y — топологические пространства и отображение T непрерывно, то T^* — равномерно непрерывное отображение относительно равномерной сходимости на бикомпактных множествах *).

Замечание. Условия непрерывности других естественно индуцированных отображений изучались Аренсом и Дугунджи [2].

Ж. Равномерная равностепенная непрерывность

Семейство F отображений равномерного пространства $(X, \mathfrak{U})$ в равномерное пространство $(Y, \mathfrak{V})$ называется *равномерно равностепенно непрерывным* тогда и только тогда, когда для каждого $V \in \mathfrak{V}$ существует $U \in \mathfrak{U}$ такое, что если $f \in F$ и $(x, y) \in U$, то $(f(x), f(y)) \in V$.

(а) Семейство F равномерно равностепенно непрерывно в том и лишь в том случае, когда оно равномерно совместно непрерывно в том смысле, что естественное отображение множества $F \times X$, наделенного равномерностью произведения, соответствующей равномерности равномерной сходимости на F и равномерности, заданной на X, в равномерное пространство Y равномерно непрерывно.

(б) Замыкание равномерно равностепенно непрерывного семейства в топологии поточечной сходимости равномерно равностепенно непрерывно.

(в) Если X бикомпактно и F равностепенно непрерывно, то F равномерно равностепенно непрерывно.

Замечание. Доказательства предшествующих утверждений не требуют применения никаких новых методов. Подробнее эта проблематика рассмотрена в статье Аренса [1] и в книге Бурбаки [1].

З. Упражнение, касающееся равномерности $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$

Пусть X — множество и $\mathfrak{A}$ — некоторое его покрытие, направленное отношением $\supset$ (последнее означает, что для любых A и B из $\mathfrak{A}$ найдется $C \in \mathfrak{A}$ такое, что $C \supset A \cup B$). Пусть, далее, $(Y, \mathfrak{V})$ — некоторое равномерное пространство и F — семейство всех отображений X в Y, наделенное равномерностью $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$ равномерной сходимости на элементах семейства $\mathfrak{A}$. Наконец, предположим, что S — некоторая направленность в F, причем для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$ задана ее поднаправленность $\{S \circ T_A(m), m \in E_A\}$, равномерно сходящаяся на множестве A к некоторому элементу s семейства F. Выпишите точную формулу поднаправленности направленности S, сходящуюся к s по топологии равномерности $\mathfrak{U} \mid \mathfrak{A}$.

И. Непрерывность отображения вычисления

Пусть F — некоторое семейство отображений множества X в множество Y. Посредством вычисления X отображается в семейство G отображений множества F в множество Y. А именно, вычисление

---

*) Если отображение $T: X \to Y$ непрерывно и удовлетворяет условию: для каждого бикомпакта $\Phi \subset Y$ существует такой бикомпакт $F \subset X$, что $fF \supset \Phi$ (k-накрывающее отображение), а $(Z, \mathfrak{U})$ — числовая прямая, то T^* является гомеоморфизмом относительно бикомпактно открытых топологий при очень широких предположениях о X и Y. (См. Архангельский [8].) (*Прим. перев.*)

$E(x)$ в точке x множества X определяется правилом: $E(x)(f)=f(x)$ при всех $f \in F$. Пусть $(X, \mathfrak{U})$ и $(Y, \mathfrak{V})$ — равномерные пространства и множество G наделено равномерностью равномерной сходимости на элементах некоторого семейства $\mathfrak{A}$ подмножеств множества F. Тогда отображение вычисления E множества X в G непрерывно, если каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является равностепенно непрерывным семейством отображений. Отображение вычисления равномерно непрерывно, если каждый элемент семейства $\mathfrak{A}$ является равномерно равностепенно непрерывным множеством отображений.

К. Подпространства, произведения и фактор-пространства k-пространств

(а) Существуют тихоновские пространства, не являющиеся k-пространствами. Так как каждое тихоновское пространство можно вложить в некоторое бикомпактное хаусдорфово пространство, то это означает, что не каждое подпространство k-пространства является k-пространством (см. задачу 2. Д).

(б) Произведение несчетного множества экземпляров вещественной прямой не является k-пространством. (Обозначим через A подмножество произведения, состоящее из всех таких x, что для некоторого целого неотрицательного числа n каждая координата элемента x, за исключением не более n из них, равна n, причем остальные координаты x равны нулю. Множество A не замкнуто, хотя $A \cap C$ бикомпактно для каждого бикомпактного множества C*).)

(в) Пусть X — k-пространство, R — отношение эквивалентности на X, и множество X/R наделено фактор-топологией. Если пространство X/R хаусдорфово, то оно будет k-пространством.

Л. k-расширение топологии

Пусть $(X, \mathfrak{J})$ — хаусдорфово пространство; *k-расширение топологии* $\mathfrak{J}$ определяется как семейство $\mathfrak{J}_k$ всех таких подмножеств U пространства X, что $U \cap C$ открыто в C, каково бы ни было бикомпактное множество $C \subset X$ (эквивалентное условие: множество A $\mathfrak{J}_k$-замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap C$ $\mathfrak{J}$-бикомпактно для каждого бикомпактного множества $C \subset X$).

(а) Если C — $\mathfrak{J}$-бикомпактное подмножество пространства X, то сужение $\mathfrak{J}$ на C совпадает с сужением $\mathfrak{J}_k$ на C. Таким образом, множество $\mathfrak{J}$ тогда и только тогда $\mathfrak{J}$-бикомпактно, когда оно $\mathfrak{J}_k$-бикомпактно.

(б) Пространство $(X, \mathfrak{J}_k)$ является k-пространством.

(в) Отображение множества X тогда и только тогда $\mathfrak{J}_k$-непрерывно, когда оно $\mathfrak{J}$-непрерывно на каждом бикомпактном подмножестве пространства X.

(г) Топология $\mathfrak{J}_k$ — наибольшая из тех, которые согласуются с топологией $\mathfrak{J}$ на бикомпактных множествах.

М. Характеристика однообразной непрерывности

Семейство F отображений топологического пространства X в топологическое пространство Y однообразно непрерывно в том и

---

*) Но наше пространство является f_k-пространством (стр. 308). (*Прим. перев.*)

только в том случае, когда из того, что направленность $\{(f_n, x_n), n \in D\}$ в $F \times X$ удовлетворяет условиям: $\{x_n, n \in D\}$ сходится к x и $\{f_n(x), n \in D\}$ сходится к y, следует, что направленность $\{f_n(x_n), n \in D\}$ сходится к y.

Н. Непрерывная сходимость

Пусть F — некоторое семейство непрерывных отображений пространства X в пространство Y. Говорят, что направленность $\{f_n, n \in D\}$ *непрерывно сходится* к элементу f семейства F, тогда и только тогда, когда для любой направленности $\{x_n, n \in D\}$ в X, сходящейся к x, направленность $\{f_n(x_n), n \in D\}$ сходится к $f(x)$.

(а) Топология $\mathfrak{J}$ на F тогда и только тогда совместно непрерывна, когда из того, что направленность в F $\mathfrak{J}$-сходится к f, непременно следует, что она сходится к f непрерывно.

(б) Если последовательность в F сходится к f относительно бикомпактно открытой топологии, то она сходится к f непрерывно.

(в) Предположим, что пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности и что в семействе F, наделенном бикомпактно открытой топологией $\mathfrak{C}$, тоже выполняется эта аксиома. Тогда топология $\mathfrak{C}$ совместно непрерывна и последовательность в F $\mathfrak{C}$-сходится к f тогда и только тогда, когда она сходится к f непрерывно.

О. Сопряженное к нормированному линейному пространству

Пусть X — вещественное нормированное линейное пространство и X^* — сопряженное к нему пространство всех непрерывных вещественных линейных функций на X. На X^* определяется норма (а по ней — *топология нормы*) следующим образом: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$. Топология поточечной сходимости на X^* называется w^*-топологией. Подмножество F множества X^* называется *w^*-ограниченным* в том и только в том случае, когда для каждой точки $x \in X$ множество всех $f(x)$, где $f \in F$, ограничено.

(а) Пространство X^* не полно относительно w^*-равномерности, если только не всякая линейная функция на X непрерывна. (См. 3.Ч. Предположите, что существует достаточно непрерывных линейных функционалов, чтобы различить точки пространства X; что это так, вытекает из теоремы Хана — Банаха, Б а н а х [1], стр. 27.)

(б) Т е о р е м а (Алаоглу). *Единичный шар в X^* бикомпактен относительно w^*-топологии. Следовательно, каждое ограниченное по норме w^*-замкнутое подмножество пространства X^* w^*-бикомпактно.* (Единичный шар замкнут в произведении $\Pi\{[-\|x\|, \|x\|] : x \in X\}$.)

(в) Пространство X^* в w^*-топологии паракомпактно и, значит, топологически полно (см 5.Щ и 6.М) *).

(г) Если подмножество F пространства X^* равностепенно непрерывно, то его w^*-замыкание тоже равностепенно непрерывно.

---

*) Любопытно, что X^* — не k-пространство и не полно в смысле Чеха (не типа G_δ в бикомпакте), даже когда X имеет счетную базу. Однако в последнем случае единичный шар в w^*-топологии метризуем. (*Прим. перев.*)

Если F равностепенно непрерывно, то его замыкание w^*-бикомпактно. Если w^*-замыкание множества F w^*-бикомпактно, то F w^*-ограничено. (Заметим, что F равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме.)

(д) Если пространство X нехудое *), в частности, если оно полно, то каждое w^*-ограниченное подмножество F пространства X^* равностепенно непрерывно. (Воспользуйтесь утверждением 6. X, (б) или примените 6. X, (а) к множеству $\{x : |f(x)| \leqslant 1$ *при каждом* $f \in F\}$.)

(е) Предположение «пространство X нехудое» нельзя исключить из посылок утверждения (д). (Рассмотрим пространство X всевозможных вещественных последовательностей, равных нулю всюду, за исключением конечного множества, с нормой $\|x\| = \sum\{|x_n| : n \in \omega\}$. Положим $f_n(x) = nx_n$; последовательность $\{f_n, n \in \omega\}$ сходится к нулю в w^*-топологии.)

Замечание. Главные результаты, изложенные в этой задаче, более или менее классические. Некоторые из них, очевидно, остаются верными при более широких предположениях. Однако эквивалентности, вытекающие из (г) и (д), не имеют места для произвольного полного линейного топологического пространства. В связи с (е) интересно отметить, что w^*-бикомпактное *выпуклое* подмножество сопряженного к произвольному нормированному линейному пространству X всегда равностепенно непрерывно. Доказательство этого факта не вполне тривиально.

П. Теорема Титце о продолжении **)

Пусть X — нормальное топологическое пространство, A — его замкнутое подмножество и f — непрерывное отображение A в замкнутый интервал $[-1, 1]$. Тогда у f есть непрерывное продолжение g, определенное на всем X, со значениями в $[-1, 1]$***). (*Воспроизводим схему доказательства Урысона* ****). Пусть $C = \{x : f(x) \leqslant -1/3\}$

*) Заметим, что пространство X^* непременно худое, если X бесконечномерно. (*Прим. перев.*)

**) История этой теоремы такова. Для плоскости X она была доказана Лебегом в начале текущего столетия, а для случая, когда X есть n-мерное евклидово пространство, — немного позже Брауэром. Титце обобщил теорему на случай любого метрического пространства. Урысон впервые доказал ее для любого нормального пространства, и это обобщение, очевидно, является окончательным (если теорема верна для пространства X, то X нормально). Теорему естественно называть теоремой Лебега — Урысона или Брауэра — Урысона, но никак не теоремой Титце. (*Прим. перев.*)

***) Эта теорема помещена именно здесь потому, что ее доказательство опирается на то обстоятельство, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных отображений является непрерывным отображением. Честно говоря, следует признаться, что в предшествующих главах есть еще три задачи, в которых этим фактом надо пользоваться.

****) Выделенная курсивом фраза добавлена мной. (*Прим. перев.*)

и $D=\{x: f(x) \geqslant 1/3\}$. В силу леммы Урысона существует непрерывное отображение f_1 пространства X в отрезок $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, равное $-\frac{1}{3}$ всюду на C и $+\frac{1}{3}$ всюду на D. Очевидно, $|f(x)-f_1(x)| \leqslant \frac{2}{3}$ при всех x из A. Ясно, что проведенное рассуждение можно повторить для функции $f-f_1$.)

Замечание. Дугунджи [1], Даукер [3] и Ханнер [1] доказали интересные обобщения теоремы о продолжении.

P. Лемма о плотности для линейных подпространств пространства $C(X)$

Пусть X — топологическое пространство, $C(X)$ — пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на нем, наделенное топологией равномерной сходимости (она индуцируется следующей нормой на $C(X)$: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$). Говорят, что подмножество L пространства $C(X)$ имеет *свойство двух множеств*, тогда и только тогда, когда, каковы бы ни были замкнутые непересекающиеся подмножества пространства X и замкнутый интервал $[a, b]$, существует отображение $f \in L$, переводящее X в $[a, b]$, множество A в точку a и множество B в точку b. Каждое линейное подпространство пространства $C(X)$, обладающее свойством двух множеств, плотно в $C(X)$. (Пусть g — любой элемент пространства $C(X)$. Предположим, что $\operatorname{dist}(g, L) > 0$. Выберем h в L так, чтобы $\operatorname{dist}(g, L)$ приблизительно равнялось $\|g-h\|$. Положим $k=g-h$, тогда $\operatorname{dist}(k, L)=\operatorname{dist}(g, L)$, а последнее равно приблизительно $\|k\|$. Покажите, что существует такой элемент $f \in L$, что $\|k-f\| \leqslant \frac{2\|k\|}{3}$.)

C. Лемма о квадратном корне для банаховых алгебр)*

Вещественная (или комплексная) *банахова алгебра* — это алгебра A над вещественными (комплексными) числами вместе с нормой, относительно которой она является полным нормированным линейным пространством, причем предполагается, что умножение удовлетворяет условию $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Пользуясь понятием нормы оператора, банахову алгебру A можно описать как банахово пространство с ассоциативным умножением, удовлетворяющим условию: умножение слева на фиксированный элемент $x \in A$ является линейным оператором, норма которого не превосходит $\|x\|$. В дальнейшем всюду A обозначает некоторую фиксированную (вещественную или комплексную) банахову алгебру.

Отображение f множества D в некоторое нормированное линейное пространство называется *абсолютно суммируемым* тогда и только тогда, когда существует $\sum\{\|f(n)\| : n \in D\}$.

---

*) Эта задача подготавливает нас к теореме Вейерштрасса — Стоуна. Однако формулируемая лемма играет определенную роль и в более общих предположениях; поэтому она устанавливается для произвольных банаховых алгебр.

(а) Каждое абсолютно суммируемое отображение в A суммируемо. Если последовательности $\{x_n, n \in \omega\}$ и $\{y_m, m \in \omega\}$ абсолютно суммируемы, то и последовательность $\{x_n y_m, (m, n) \in \omega \times \omega\}$ абсолютно суммируема, причем $\sum \{x_n : n \in \omega\} \sum \{y_m : m \in \omega\} = \sum \{x_n y_m: (m, n) \in \omega \times \omega\}$. (Этот результат хорош тем, что последнюю сумму можно вычислять, группируя слагаемые более или менее произвольно. См. 6. У.)

(б) Пусть a_n — n-й коэффициент разложения в ряд Тейлора функции $(1-t)^{1/2}$ в точке 0. Тогда $a_0 = 1$, a_n отрицателен при положительных n, $\sum \{a_n : n \in \omega\} = 0$ и сумма $\sum \{a_n a_{p-n} : n \in \omega$ *и* $n \leqslant p\}$ равна 1, -1 и 0 при $p=0$, $p=1$ и $p>1$ соответственно. (Можно было бы определить коэффициенты a_n рекурсивно, потребовав, чтобы выполнялось последнее условие. Проверив, что $a_n < 0$ при положительных n, мы замечаем, что частичные суммы $\sum \{a_n t^n : n < p\}$ монотонно убывают с ростом n и ограничены снизу функцией $(1-t)^{1/2}$ при $0 \leqslant t < 1$, а значит, также и при $t=1$.)

(в) Если алгебра обладает единичным элементом u и $\|x-u\| \leqslant 1$, то в алгебре есть элемент y такой, что $y^2 = x$. А именно, в качестве y можно взять $\sum \{a_n (u-x)^n : n \in \omega\}$, где a_n — те же, что и в (б). Мы принимаем здесь, что $x^0 = u$. Элемент y можно представить также в виде $y = \sum \{a_n [(u-x)^n - u] : n \geqslant 1\}$. Итак, y — предел полиномов от x без свободных членов.

Замечание. Очевидно, пользуясь методами, примененными выше, можно получить еще много информации. (Например, если $\|x\| < 1$, то $\sum \{x^n : n \in \omega\}$ — элемент, обратный к $u - x$ *).)

Т. Теорема Вейерштрасса — Стоуна

(а) Пусть X — бикомпактное топологическое пространство и $C(X)$ — алгебра всех непрерывных вещественных функций на X, наделенная нормой: $\|f\| = \sup \{|f(x)| : x \in X\}$. Тогда если подалгебра R алгебры $C(X)$ *обладает свойством двух точек*: для любых различных элементов x и y пространства X и произвольной пары вещественных чисел a и b существует такая функция $f \in R$, что $f(x) = a$ и $f(y) = b$, то множество R плотно в $C(X)$.

В частности, подалгебра R плотна в $C(X)$, если ей принадлежат все постоянные функции и она различает точки (в том смысле, что если $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$ для некоторого f из R)

Доказательство распадается в последовательность лемм.

1) Если $f \in R$, то $|f|$ принадлежит замыканию $\overline{R}$ подалгебры R где $|f|(x) = |f(x)|$. (Воспользовавшись утверждением 7. С, извлеките квадратный корень из f^2.)

---

*) В основном теория банаховых алгебр (нормированных колец) создана И. М. Гельфандом. Читайте о ней в книге: М. А. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956. (*Прим. перев.*)

2) Если f и g принадлежат рассматриваемой подалгебре, то функции $\max[f, g]$ и $\min[f, g]$ тоже принадлежат ей. (Здесь $\max[f, g](x) = \max[(f(x), g(x)]$. Заметим, что $\max[a, b] = \frac{1}{2}[(a+b) + |a-b|]$ и $\min[a, b] = \frac{1}{2}[(a+b) - |a-b|]$.)

3) Если подалгебра R обладает свойством двух точек, $f \in C(X)$, $x \in X$ и $e > 0$, то существует такая функция $g \in \overline{R}$, что $g(x) = f(x)$ и $g(y) < f(y) + e$ при всех y из X. (Воспользовавшись бикомпактностью X, возьмите минимум подходящего конечного семейства функций.)

Завершает доказательство теоремы переход к максимуму некоторого конечного семейства функций, подобранных с помощью 3).

(б) Если X — топологическое пространство и семейство $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на X наделено топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах, то каждая подалгебра алгебры $C(X)$, обладающая свойством двух точек, плотна в $C(X)$.

З а м е ч а н и е. Это, несомненно, самое полезное из известных свойств алгебры $C(X)$. Соответствующее утверждение о комплексно-значных функциях неверно (рассмотрите, например, функции, непрерывные на круге единичного радиуса, аналитические внутри него). См. статью М. С т о у н а [5], в которой дано детальное обсуждение.

У. Строение $C(X)$

На всем протяжении этого упражнения X, Y и Z будут обозначать бикомпактные хаусдорфовы пространства, а $C(X)$, $C(Y)$ и $C(Z)$ будут алгебрами всех непрерывных вещественных функций над X, Y и Z соответственно. *Вещественным гомоморфизмом* алгебры называется любой ее гомоморфизм в алгебру вещественных чисел.

(а) Для каждого непрерывного отображения F пространства X в пространство Y обозначим через F^* индуцированное отображение алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$, описываемое правилом: $F^*(h) = h \circ F$ при всех h из $C(Y)$. Тогда:

1) F^* — гомоморфизм алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$;

2) F отображает X на Y тогда и только тогда, когда F^* является изоморфизмом алгебры $C(Y)$ на некоторую подалгебру алгебры $C(X)$, содержащую единицу;

3) F взаимно однозначно в том и только в том случае, когда F^* отображает $C(Y)$ на $C(X)$;

4) если G — непрерывное отображение пространства Y в Z, то $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$;

5) если F — топологическое отображение*) пространства X на пространство Y, то $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$.

(б) *Топология банаховой алгебры $C(X)$ полностью определяется алгебраическими операциями.* Подробнее: $f \geqslant g$ тогда и только тогда, когда $f - g$ является квадратом некоторого элемента из $C(X)$

*) То есть F — гомеоморфизм. (*Прим. перев.*)

и $\|f\| = \inf\{k: -ku \leqslant f \leqslant ku\}$, где u — функция, тождественно равная единице. Для любого вещественного гомоморфизма φ алгебры $C(X)$ имеем $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$, и если φ не равен тождественно нулю, то $\varphi(u) = 1$.

(в) Пусть S — множество всех вещественных гомоморфизмов φ алгебры $C(X)$, для которых $\varphi(u) = 1$, наделенное топологией поточечной сходимости, и E — отображение вычисления X в S (т. е. $E(x)(f) = f(x)$). Тогда E — топологическое отображение пространства X на пространство S. (Покажите, что S бикомпактно, покажите с помощью теоремы Вейерштрасса — Стоуна, что отображение вычисления D пространства $C(X)$ в пространство $C(S)$ является изоморфизмом алгебры $C(X)$ на алгебру $C(S)$, проверьте, что $E^* = D^{-1}$ и воспользуйтесь утверждением (а).)

(г) Пространство X метризуемо в том и только в том случае, когда пространство $C(X)$ сепарабельно. (Этот результат не понадобится в оставшейся части задачи. Он приведен просто для тренировки на применение сказанного в (в).)

(д) Для любого гомоморфизма H алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$, переводящего единицу алгебры $C(Y)$ в единицу алгебры $C(X)$, существует и единственно непрерывное отображение F пространства X в пространство Y, для которого $H = F^*$. (Просто гомоморфизм H индуцирует отображение вещественных гомоморфизмов алгебры $C(X)$ в вещественные гомоморфизмы алгебры $C(Y)$.)

(е) Пусть R — замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$, причем $u \in R$, F — отображение пространства X в произведение $\Pi\{f[X] : f \in R\}$, определенное формулой $F(x)_f = f(x)$, и Y — пространство значений отображения F. Тогда R является множеством значений индуцированного изоморфизма F^* алгебры $C(Y)$ в алгебру $C(X)$.

(ж) Пусть I — замкнутый идеал в $C(X)$ и $Z = \{x : f(x) = 0$ *при всех* f *из* $I\}$. Тогда I состоит из всех элементов алгебры $C(X)$, тождественно равных нулю на Z. (Если множество Z пусто, то в I существует элемент, не обращающийся в нуль ни в одной точке пространства X; у этого элемента есть обратный. Рассмотрим подалгебру $C+I$, где C — множество постоянных функций. Из непустоты Z вытекает, что множество $C+I$ замкнуто, теперь можно применить (е).)

Замечания. О строении $C(X)$ известно совсем немного. Дальнейшие сведения и ссылки можно найти в обзоре, написанном на эту тему Майерсом [2]. См. также работу Хьюитта [2]*).

Ф. Бикомпактные расширения групп; почти периодические функции

Естественно пытаться отобразить произвольную топологическую группу в бикомпактную топологическую группу так, чтобы образ был всюду плотен в последней, — на манер вложения тихоновского пространства в его бикомпактное расширение Стоуна — Чеха. Топологического вложения обычно не существует — полная группа замкнута в каждой хаусдорфовой группе, топологически и изоморфно ее

*) См. также Гилман и Джерисон [1]. (*Прим. перев.*)

содержащей. Однако можно получить ряд интересных результатов; следующие ниже предложения надо рассматривать как вступление к ним. Развитие темы мотивировано таким наблюдением: если φ — непрерывный гомоморфизм топологической группы G в бикомпактную группу H и g — непрерывная вещественная функция на H, то множество всех левых сдвигов функции $g\circ\varphi$ вполне ограничено (относительно равномерности равномерной сходимости).

Всюду в этой задаче предполагается, что G — некоторая фиксированная топологическая группа. Для каждой ограниченной вещественной функции f на группе G и каждого $x\in G$ определим *левый сдвиг* $L_x(f)$ функции f на элемент x правилом: $L_x(f)(y)=f(x^{-1}y)$. Пространство всех ограниченных вещественных функций метризуется: $d(f,g)=\sup\{|f(x)-g(x)|:x\in X\}$. *Левая орбита* X_f функции f определяется как замыкание множества всех левых сдвигов функции f в метрической топологии. Функция f называется *почти периодической* слева тогда и только тогда, когда множество X_f бикомпактно.

Обозначим через A множество всех непрерывных почти периодических слева функций на G Тогда для каждого $x\in G$ левый сдвиг L_x отображает A в A. Наделим множество всех отображений пространства A в себя топологией поточечной сходимости и обозначим через $\alpha[G]$ замыкание множества всех левых сдвигов относительно этой топологии.

(а) Лемма. *Пусть (X,d) — бикомпактное метрическое пространство и K — группа (по отношению к операции композиции) всех изометрий пространства (X,d) в себя. Топология (на K) равномерной сходимости на X совпадает с топологией метрики $d^*(R,S)=\sup\{d(R(x),S(x)):x\in X\}$, а последняя совпадает с топологией поточечной сходимости на X. Группа K в этой топологии является бикомпактной топологической группой.*

(б) Пространство $\alpha[G]$ бикомпактно (заметим, что $\alpha[G]\subset\Pi\{X_f:f\in A\}$).

(в) Каждый элемент из $\alpha[G]$ представляет собой некоторую изометрию, отображающую каждую левую орбиту саму на себя. Естественное отображение топологического пространства группы $\alpha[G]$ в пространство произведения $\Pi\{K_f:f\in A\}$, где K_f — группа всех изометрий пространства X_f, является топологическим изоморфизмом. Следовательно, $\alpha[G]$ — топологическая группа.

(г) Если A наделить топологией поточечной сходимости на G и на $\alpha[G]$ (являющемся подмножеством множества A^A) взять топологию, индуцированную топологией произведения, то получится та же топология, что и выше. Значит, $R_n\to R$ в $\alpha[G]$ тогда и только тогда, когда $R_n(f)(x)\to R(f)(x)$ при всех f из A и всех x из G.

(д) Отображение L группы G в группу $\alpha[G]$, переводящее $x\in G$ в L_x, является непрерывным гомоморфизмом. Наименьшая топология на G, относительно которой L непрерывно, совпадает с наименьшей топологией, относительно которой непрерывны все $f\in A$. ($\alpha[G]$ можно описать также как пополнение группы G, взятой по модулю подгруппы, образованной теми ее элементами, которые не отделяются функциями из A от единицы группы, относительно наименьшей равномерности, при которой все $f \in A$ равномерно непрерывны.)

(е) Пусть g — непрерывная вещественная функция на $\alpha[G]$. Тогда $g \circ L \in A$. Если $f \in A$ и g — функция на $\alpha[G]$, определенная правилом $g(R) = R^{-1}(f)(e)$, то $f = g \circ L$, причем функция g непрерывна. Семейство всех непрерывных вещественных функций на $\alpha[G]$ изометрично (и изоморфно) A.

(ж) Для любого непрерывного гомоморфизма φ группы G в бикомпактную топологическую группу H существует такой непрерывный гомоморфизм θ группы $\alpha[G]$ в H, что $\varphi = \theta \circ L$. (Более общий факт: в случае любой группы H гомоморфизм φ индуцирует естественный гомоморфизм θ группы $\alpha[G]$ в группу $\alpha[H]$ такой, что $\theta \circ L = L \circ \varphi$. См. определение α.)

Из предшествующего с очевидностью вытекает ряд следствий. Например, функция почти периодична слева тогда и только тогда, когда она почти периодична справа (и обратно); класс A является банаховой алгеброй, изоморфной алгебре всех непрерывных функций на бикомпактной группе $\alpha[G]$.

(з) Название «почти периодическая» возникло на основе другого описания класса A. Элемент $x \in G$ называется *левым e-периодом* вещественной функции f в том и лишь в том случае, когда $|f(x^{-1}y) - f(y)| < e$ при всех $y \in G$. Обозначим через A_e множество всех левых e-периодов непрерывной функции f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Существует гомоморфизм φ группы G в некоторую бикомпактную группу H и непрерывная вещественная функция h на H такие, что $f = h \circ \varphi$.

2) Множество всех левых сдвигов функции f вполне ограничено относительно равномерности равномерной сходимости.

3) Для каждого положительного числа e существует конечное подмножество B множества G такое, что $G = BA_e$.

(Связь между условиями 2) и 3) проясняет такое наблюдение: $|L_x(f)(z) - L_y(f)(z)| < e$ при всех z тогда и только тогда, когда $y^{-1}x$ является левым e-периодом.)

Замечания. Приведенные выше результаты принадлежат в первую очередь А. Вейлю [2]. Эквивалентность утверждений 2) и 3) из (з) — это классическая теорема Бохнера. Люмис в [2] исследует почти периодические функции, показывая сначала, что множество всех почти периодических слева функций на группе удовлетворяет условиям, характеризующим банахову алгебру функций, и затем определяя $\alpha[G]$ как множество всех вещественных гомоморфизмов этой банаховой алгебры.

Предложение (а) подсказывает общую задачу построения на группе гомеоморфизмов топологии, относительно которой эта группа была бы топологической. Результаты, идущие в этом направлении, и ссылки можно найти в работах Аренса [2] и Дьедонне [5].